

AUTOMORPHISMES, GRADUATIONS ET CATÉGORIES TRIANGULÉES

RAPHAËL ROUQUIER

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Notations	3
3. Groupes d'automorphismes d'algèbres de dimension finie	3
3.1. Structure	3
3.2. Familles algébriques d'automorphismes et bimodules	5
3.3. Familles d'automorphismes extérieurs	7
4. Invariance du groupe des automorphismes extérieurs	10
4.1. Equivalences de Morita	10
4.2. Equivalences dérivées	11
4.3. Equivalences stables à la Morita	12
4.4. Equivalences dérivées de variétés projectives lisses	16
5. Algèbres graduées	17
5.1. Généralités	17
5.2. Puissances cycliques de l'espace cotangent	18
5.3. Changement de graduation	19
5.4. Graduations et positivité	20
5.5. Dualité	22
5.6. Matrices de Cartan	23
5.7. Degré 0	23
6. Equivalence stables graduées	24
6.1. Invariances	24
6.2. Algèbres de groupes et graduations	26
6.3. Extensions triviales d'algèbres	28
6.4. Algèbres extérieures	30
Références	32

RÉSUMÉ. We give a moduli interpretation of the outer automorphism group Out of a finite dimensional algebra similar to that of the Picard group of a scheme. We deduce that the connected component of Out is invariant under derived and stable equivalences. This allows us to transfer gradings between algebras and gives rise to conjectural homological constructions of interesting gradings on block of finite groups with abelian defect. We give applications to the lifting of stable equivalences to derived equivalences. We give a counterpart of the invariance result for smooth projective varieties : the product $\text{Pic}^0 \rtimes \text{Aut}^0$ is invariant under derived equivalence.

1. INTRODUCTION

Il est classique qu'un automorphisme σ d'une algèbre de dimension finie A fournit une version tordue A_σ du bimodule régulier et qu'on obtient ainsi une bijection entre automorphismes extérieurs et classes d'isomorphismes de bimodules, libres de rang 1 comme modules à gauche et à droite. Dans ce travail, nous donnons une version géométrique de ce résultat (théorème 3.14). Le groupe des automorphismes extérieurs représente le foncteur qui associe à une variété S le quotient du groupe des classes d'isomorphisme de $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -bimodules qui sont localement libres de rang 1 comme $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules et comme $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules par $\text{Pic}(S \times \text{Spec } \mathbb{Z}A)$. Le résultat classique s'en déduit par passage aux points fermés (*i.e.*, cas où S est un point). Ceci est à rapprocher de la description de la variété de Picard d'une variété projective lisse X comme représentant le foncteur $S \mapsto \text{Pic}(X \times S)/\text{Pic}(S)$.

Nous déduisons de cette description de Out que la composante connexe Out^0 de l'identité est invariante par équivalence de Morita (théorème 4.2), résultat dû à Brauer [Po]. De manière similaire, on déduit l'invariance de Out^0 par équivalence dérivée (théorème 4.6), résultat obtenu indépendamment, et par des méthodes différentes, par B. Huisgen-Zimmermann et M. Saorin [HuiSa]. Nous donnons aussi une version de ce résultat pour les géomètres : pour une variété projective lisse, le produit $\text{Pic}^0 \rtimes \text{Aut}^0$ est invariant par équivalence de catégories dérivées (théorème 4.18).

Le cas d'équivalences stables entre algèbres auto-injectives est plus délicat. La rigidité des modules projectifs est bien connue, celle de facteurs directs projectifs n'est pas nouvelle non plus. Ces propriétés sont de nature locale et nous avons besoin d'un critère qui nous assure de la présence globale d'un facteur direct projectif, à partir d'informations ponctuelles. C'est l'objet de la proposition 4.11. On déduit alors l'invariance de Out^0 par équivalence stable de type de Morita entre algèbres auto-injectives (théorème 4.15).

Nous en déduisons la possibilité de transporter des graduations par de telles équivalences : en particulier, on s'attend, de cette manière, à obtenir des graduations intéressantes pour les blocs à défaut abélien des groupes finis (car l'algèbre de groupe d'un p -groupe fini sur un corps de caractéristique p admet une graduation compatible aux puissances du radical) ou pour les algèbres de Hecke aux racines de l'unité.

Le bloc principal de la catégorie \mathcal{O} d'une algèbre de Lie semi-simple complexe peut être munie d'une "graduation" extrêmement intéressante — les polynômes de Kazhdan-Lusztig s'interprètent alors comme les multiplicités graduées des modules simples apparaissant dans les modules de Verma. Cette graduation provient de l'équivalence avec une catégorie de faisceaux pervers sur la variété des drapeaux, où la graduation provient des structures de poids (structure de Hodge mixte ou action de l'endomorphisme de Frobenius). La graduation a aussi été construite algébriquement par Soergel [Soe] et notre travail est en ce sens une continuation de celui de Soergel.

Notre travail montre qu'un phénomène similaire doit se passer pour les blocs à défaut abélien de groupes finis, malgré l'absence de géométrie pour l'interpréter. L'utilisation de ces graduations pour prouver la conjecture du défaut abélien de Broué se heurte au problème de positivité des graduations obtenues. Le point clef est le relèvement d'équivalences stables en équivalences dérivées. Nous montrons que de tels relèvements existent pour les algèbres extension triviale d'une algèbre héréditaire (théorème 6.18). Des résultats similaires dans le cas où le type de représentation est fini sont dûs à Asashiba, qui avait utilisé des méthodes de recouvrement pour relever des équivalences stables en équivalences dérivées [As1].

Je remercie M. Broué, D. Huybrechts et J.-P. Serre pour leurs commentaires et leurs suggestions, et A. Yekutieli, pour des discussions qui ont considérablement aidé ma compréhension de ce travail.

Les résultats de cet article ont été exposés en 2000-2002 (Paris, Chicago, Constanța, Yale, Tokyo, Osaka, Oberwolfach, Londres, Grenoble) et annoncés plus récemment dans [Rou3, §3.1.2]. Une version préliminaire de cet article a circulé en 2000-2001.

2. NOTATIONS

On prend pour k un corps algébriquement clos. Par variété, on entend un schéma séparé réduit de type fini sur k . Par groupe algébrique, on entend un schéma en groupe affine lisse de type fini sur k . Si X est un schéma affine et x un point fermé de X , on note \mathfrak{m}_x l'idéal maximal correspondant de $\Gamma(X)$.

On écrira \otimes pour \otimes_k .

Soit A une k -algèbre. On note A° l'algèbre opposée et on pose $A^{\text{en}} = A \otimes A^\circ$. On note $J(A)$ le radical de Jacobson de A et on pose $J^i(A) = J(A)^i$. On note $\text{soc}^i(A)$ l'annulateur de $J^i(A)$ dans A . On note $A\text{-mod}$ la catégorie des A -modules à gauche de type fini et $D^b(A)$ sa catégorie dérivée bornée, lorsque A est cohérent.

Si A est de dimension finie et $M \in A\text{-mod}$, on note P_M une enveloppe projective de M . On note $\Omega_A M$ le noyau d'une surjection $P_M \rightarrow M$. On pose $\Omega_A^0 M = M$ et $\Omega_A^i M = \Omega_A(\Omega_A^{i-1} M)$ pour $i > 0$. Si I_M est une enveloppe injective de M et $M \rightarrow I_M$ est une injection, on note $\Omega_A^{-1} M$ son conoyau. On définit par induction $\Omega_A^{-i} M = \Omega_A^{-1}(\Omega_A^{-i+1} M)$ pour $i \geq 1$.

Pour une algèbre graduée A , la catégorie $A\text{-modgr}$ désignera la catégorie des A -modules gradués (de même pour la catégorie stable $A\text{-stabgr}$). Pour V un A -module gradué, on note $W = V\langle i \rangle$ le A -module gradué donné par $W_j = V_{i+j}$. On note $\text{Homgr}(V, V') = \bigoplus_i \text{Hom}(V, V'\langle i \rangle)$. Pour V un k -espace vectoriel, on note $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ le dual k -linéaire.

Soit X une variété sur k . Pour x point de X , on note $k(x)$ le corps résiduel en x (corps des fractions de $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$). Pour \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module, on note $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$. On écrira parfois " $x \in X$ " pour " x est un point fermé de X ".

3. GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ALGÈBRES DE DIMENSION FINIE

3.1. Structure.

3.1.1. Soit k un corps algébriquement clos et A une k -algèbre de dimension finie.

Soit G un groupe algébrique d'automorphismes de A . Soit $\Delta_A : A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_G$ le morphisme associé. Alors, Δ_A est un morphisme d'algèbres (en particulier, $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$ pour $g \in G$ et $a, b \in A$). En outre, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta_A} & A \otimes \mathcal{O}_G \\ \Delta_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes \Delta \\ A \otimes \mathcal{O}_G & \xrightarrow{\Delta_A \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_G}} & A \otimes \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G \end{array}$$

où $\Delta : \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G$ est la comultiplication (en particulier, $g \cdot (g' \cdot a) = (gg') \cdot a$ pour $g, g' \in G$ et $a \in A$).

3.1.2. On a une suite exacte de groupes algébriques :

$$1 \rightarrow 1 + J(A) \rightarrow A^\times \rightarrow (A/J(A))^\times \rightarrow 1$$

et $1 + J(A)$ est le radical unipotent de A^\times . On a une filtration $1 + J(A) \supset 1 + J^2(A) \supset \dots$ dont les quotients successifs sont des groupes unipotents commutatifs \mathbf{G}_a^r .

Soit S une sous-algèbre semi-simple maximale de A , *i.e.*, l'image d'une section du morphisme d'algèbres $A \rightarrow A/J(A)$. On a $A = S \oplus JA$ et $A^\times = (1 + J(A)) \rtimes S^\times$.

Soit $\text{Aut}(A)$ le groupe d'automorphismes de A (vu comme schéma en groupe sur k). On note $\text{Int}(A)$ son groupe d'automorphismes intérieurs, image de A^\times par le morphisme de conjugaison $\text{ad} : A^\times \rightarrow \text{Aut}(A)$, $a \mapsto (b \mapsto aba^{-1})$. C'est un sous-groupe fermé distingué connexe.

On a une suite exacte

$$1 \rightarrow (ZA)^\times \rightarrow A^\times \rightarrow \text{Int}(A) \rightarrow 1.$$

Elle fournit une décomposition

$$\text{Int}(A) = ((1 + J(A))/(1 + J(ZA))) \rtimes (S^\times / ((ZA)^\times \cap S^\times)).$$

Lemme 3.1. *Soit H un sous-groupe fermé distingué d'un groupe algébrique G et $f : G \rightarrow G/H$ le morphisme quotient. Si H est extension de groupes additifs \mathbf{G}_a et de groupes multiplicatifs \mathbf{G}_m , alors, f est localement scindé comme morphisme de variétés.*

Démonstration. (cf [Se, VII §1.6]) Il suffit de démontrer le lemme lorsque G/H est connexe. Soit η le point générique de G/H . Son image inverse dans G est un espace homogène principal sous H , donc est trivial, *i.e.*, possède un point rationnel sur $k(\eta)$ (car un espace homogène principal sous un groupe \mathbf{G}_a ou \mathbf{G}_m est trivial). Un tel point fournit une section rationnelle du morphisme f . \square

Il résulte du lemme 3.1 que

Proposition 3.2. *Le morphisme canonique de variétés $A^\times \rightarrow \text{Int}(A)$ est localement scindé.*

3.1.3. Soit $\text{Out}(A)$ le groupe quotient $\text{Aut}(A)/\text{Int}(A)$. La composante connexe de l'identité $\text{Aut}^0(A)$ de $\text{Aut}(A)$ est contenue dans le sous-groupe $\text{Aut}^K(A)$ des éléments qui fixent les classes d'isomorphisme de modules simples (=qui agissent intérieurement sur A/JA). On note $\text{Out}^K(A)$ le sous-groupe de $\text{Out}(A)$ défini de manière similaire.

Si $A = A_1 \times A_2$, alors $\text{Out}^0(A) = \text{Out}^0(A_1) \times \text{Out}^0(A_2)$. Si A est simple, alors $\text{Out}(A) = 1$.

Soit $F(A)$ le sous-groupe fermé distingué de $\text{Aut}^0(A)$ formé des éléments qui agissent trivialement sur $A/J(A)$.

Puisque le morphisme d'algèbres $A \rightarrow A/J(A)$ est scindé et que $\text{Aut}^0(A/J(A)) = \text{Int}(A/J(A))$, on déduit que l'on a une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow F(A) \rightarrow \text{Aut}^0(A) \rightarrow \text{Int}(A/J(A)) \rightarrow 1$$

et $\text{Aut}^0(A) = F(A) \cdot \text{Int}(A)$, *i.e.*, le morphisme canonique $F(A) \rightarrow \text{Out}^0(A)$ est surjectif.

On a

$$F(A) \cap \text{Int}(A) = ((1 + J(A))/(1 + J(ZA))) \rtimes ((ZS)^\times / ((ZA)^\times \cap S^\times)).$$

On déduit du lemme 3.1 que les morphismes canoniques $1 + J(A) \rightarrow F(A) \cap \text{Int}(A)$ et $F(A) \rightarrow \text{Out}^0(A)$ sont localement scindés.

En particulier, on a

Proposition 3.3. *Le morphisme de variétés $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Out}(A)$ est localement scindé.*

Proposition 3.4. *On a $\text{Aut}^K(A) = C_{\text{Aut}(A)}(S) \cdot \text{Int}(A)$.*

Démonstration. Tout d'abord, les éléments de $C_{\text{Aut}(A)}(S)$ et $\text{Int}(A)$ fixent les classes d'isomorphisme de A -modules simples.

On prend $\phi \in \text{Aut}^K(A)$. Alors, $\phi(S)$ est conjuguée à S [Th, Théorème 7.3(c)]. Quitte à changer ϕ par un automorphisme intérieur, on peut supposer $\phi(S) = S$. Par hypothèse, ϕ induit alors un automorphisme intérieur de S . Donc, quitte à multiplier par un élément inversible de S , on se ramène au cas où ϕ agit trivialement sur S . \square

Remarque 3.5. Soit $G(A)$ le sous-groupe de $F(A)$ des éléments qui agissent trivialement sur JA/J^2A . Alors, $G(A)$ agit trivialement sur $J^iA/J^{i+1}A$ pour tout i , donc $G(A)$ est unipotent (notons au passage que $\text{Aut}(A)$ est contenu dans le sous-groupe parabolique de $\text{End}_{k\text{-mod}}(A)^\times$ fixateur du drapeau $A \supset JA \supset J^2A \supset \dots$ et que $G(A)$ est l'intersection du radical unipotent de ce sous-groupe parabolique avec $\text{Aut}^0(A)$).

Ainsi, le noyau de l'application canonique

$$F(A) \rightarrow \text{End}_{(A/J(A) \otimes (A/J(A))^\circ)}(JA/J^2A)^\times$$

est unipotent : la partie réductive de $\text{Out}(A)$ se retrouve dans l'action de $F(A)$ sur l'espace cotangent.

Notons enfin que $\text{End}_{(A/J(A) \otimes (A/J(A))^\circ)}(JA/J^2A)^\times \simeq \prod_{V,W} \text{GL}(\text{Ext}_A^1(V,W))$, où V, W parcourent un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de A -modules simples (lemme 5.2). On dispose de représentations de $F(A)$ sur les $\text{Ext}_A^1(V,W)$ et la somme de ces représentations a un noyau unipotent. En particulier, si ces Ext^1 sont de dimension 0 ou 1, alors $F(A)$ (et donc $\text{Out}^0(A)$) est résoluble.

Remarque 3.6. Le lecteur intéressé pourra considérer la version schématique Aut' du groupe des automorphismes. Soit $A = k[x]/x^2$. Si k n'est pas de caractéristique 2, alors $\text{Aut}'(A) \simeq \mathbf{G}_m$ est réduit. Par contre, lorsque k est de caractéristique 2, $\text{Aut}'(A)$ est un produit semi-direct $U^{[1]} \rtimes \mathbf{G}_m$ où $U^{[1]}$ est le noyau de l'endomorphisme de Frobenius $x \rightarrow x^2$ sur \mathbf{G}_a . Dans ce cas, $\text{Aut}'(A)$ n'est pas réduit.

Remarque 3.7. On a une suite de sous-groupes de $\text{Aut}(A)$, correspondant aux fixateurs des $J^i(A)$.

Remarque 3.8. Notons que les endomorphismes de k -algèbres (unitaires) de A préservent JA . En effet, soit S une sous-algèbre semi-simple maximale de A . Soit σ un endomorphisme de A . Alors, la composition $S \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} A \rightarrow A/JA$ est un morphisme d'algèbres unitaires entre deux algèbres semi-simples isomorphes, donc est un isomorphisme. Par conséquent, le noyau du morphisme surjectif $A \xrightarrow{\sigma} A \rightarrow A/JA$ est JA , donc $\sigma(JA) \subseteq JA$.

Les endomorphismes non unitaires de A ne préservent pas nécessairement JA . La représentation régulière de $k[x]/(x^2)$ fournit un plongement de $k[x]/(x^2)$ dans $M_2(k)$. En prolongeant par 0, on obtient un endomorphisme non unitaire de $A = k[x]/(x^2) \oplus M_2(k)$, injectif sur JA , d'image ayant une intersection nulle avec JA .

3.2. Familles algébriques d'automorphismes et bimodules.

3.2.1. Soit S une variété. On note $\delta : S \rightarrow S \times S$ le plongement diagonal. Se donner un morphisme π de S dans l'espace des endomorphismes de k -espace vectoriel de A revient à se donner un morphisme $\rho : A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_S$ de faisceaux de k -espaces vectoriels sur S . Demander

que le morphisme π soit à valeur dans l'espace des endomorphismes d'algèbre revient à demander que ρ soit un morphisme d'algèbres. Demander que f soit à valeurs dans la variété des endomorphismes inversibles revient à demander que le morphisme

$$\rho \otimes 1 : A \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\rho \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_S}} A \otimes \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \delta^*} A \otimes \mathcal{O}_S$$

soit un isomorphisme (*i.e.*, pour tout point fermé x de S , le morphisme composé $A \xrightarrow{\rho} A \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow A \otimes k(x) = A$ est un isomorphisme).

Soit $\mathcal{D}_A(S)$ l'ensemble des morphismes d'algèbres $\rho : A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_S$ tels que $\rho \otimes 1 : A \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_S$ est un isomorphisme.

On munit $\mathcal{D}_A(S)$ d'une structure de groupe par

$$\rho * \rho' : A \xrightarrow{\rho'} A \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\rho \otimes 1} A \otimes \mathcal{O}_S.$$

Soit $\phi : S' \rightarrow S$ un morphisme de variétés. On a alors une application canonique

$$\mathcal{D}_A(S) \rightarrow \mathcal{D}_A(S'), \quad \rho \mapsto (A \xrightarrow{\rho} A \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \phi^*} A \otimes \mathcal{O}_{S'}).$$

On obtient ainsi un foncteur \mathcal{D}_A de la catégorie des variétés vers la catégorie des groupes : il est représenté par $\text{Aut}(A)$.

3.2.2. Soit $\tilde{\mathcal{C}}_A(S)$ l'ensemble des couples (M, f) où M est un $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -module, libre de rang 1 comme $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module et comme $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -module et f est un isomorphisme de $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules de M vers $A \otimes \mathcal{O}_S$.

On définit un produit par $(M, f) * (M', f') = ((M \otimes_A M') \otimes_{\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S, f'')$ où $f'' = h \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_S}$ et h est l'isomorphisme de $(A \otimes \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules

$$h : M \otimes_A M' \xrightarrow{\text{id}_M \otimes f'} M \otimes_A A \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{can}} M \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_S}} A \otimes \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S.$$

Soit $\phi : S' \rightarrow S$ un morphisme de variétés. On a alors une application canonique

$$\tilde{\mathcal{C}}_A(S) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_A(S'), \quad (M, f) \mapsto (\phi^* M, f')$$

où $f' : \phi^* M \xrightarrow{\phi^*(f)} \phi^*(A \otimes \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\text{can}} A \otimes \mathcal{O}_{S'}$.

On dit que (M, f) et (M', f') sont isomorphes si $f^{-1}f' : M' \rightarrow M$ est compatible à l'action de A° , *i.e.*, si c'est un isomorphisme de $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules. On note $\mathcal{C}_A(S)$ le groupe des classes d'isomorphisme d'éléments de $\tilde{\mathcal{C}}_A(S)$.

On a construit un foncteur \mathcal{C}_A de la catégorie des variétés vers la catégorie des groupes.

Proposition 3.9. *Le foncteur \mathcal{C}_A est représenté par $\text{Aut}(A)$.*

Démonstration. On construit un isomorphisme $\mathcal{D}_A \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_A$.

Soit $\rho \in \mathcal{D}_A(S)$. On définit $M = A \otimes \mathcal{O}_S$ comme $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module et l'action de $a \in A^\circ$ est donnée par multiplication à droite par $\rho(a)$. On prend pour f l'identité. Alors, $(M, f) \in \mathcal{C}_A(S)$ et on a construit un morphisme de foncteurs $\mathcal{D}_A \rightarrow \mathcal{C}_A$.

On construit l'inverse comme suit. Soit $(M, f) \in \mathcal{C}_A(S)$. On a un isomorphisme canonique (multiplication à droite)

$$A \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \text{End}_{A \otimes \mathcal{O}_S}(A \otimes \mathcal{O}_S).$$

Via f , il induit un isomorphisme

$$\alpha : A \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \text{End}_{A \otimes \mathcal{O}_S}(M).$$

Finalement, on obtient un morphisme d'algèbres

$$\rho : A \rightarrow \text{End}_{A \otimes \mathcal{O}_S}(M) \xrightarrow{\alpha^{-1}} A \otimes \mathcal{O}_S$$

où la première flèche est donnée par l'action à droite de A sur M . Alors, $\rho \in \mathcal{D}_A(S)$. \square

3.2.3. Soit $\varepsilon : k \rightarrow A \otimes A^* \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_{A^\times}$ où la première flèche est le morphisme canonique, la seconde flèche est l'inclusion des fonctions linéaires sur A dans l'espace des fonctions polynomiales et la troisième flèche provient de l'inclusion de A^\times dans A . Alors, le morphisme $A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_{A^\times}$ associé par la correspondance de §3.2.1 au morphisme de conjugaison $A^\times \rightarrow \text{Aut}(A)$ est donné par $a \mapsto \varepsilon(1)a\varepsilon(1)^{-1}$.

Soit $(M, f) \in \mathcal{C}_A(S)$. Alors, le morphisme associé $\pi : S \rightarrow \text{Aut}(A)$ se factorise par A^\times si et seulement si $M \simeq A \otimes \mathcal{O}_S$. Via un tel isomorphisme, f est la multiplication à gauche par un élément $\zeta \in \Gamma(A \otimes \mathcal{O}_S)^\times$. Le morphisme ρ associé est $a \mapsto \zeta a \zeta^{-1}$.

Plus généralement, le morphisme $S \rightarrow \text{Aut}(A)$ associé à $(M, f) \in \mathcal{C}_A(S)$ est à valeur dans $\text{Int}(A)$ si et seulement si M est localement isomorphe à $A \otimes \mathcal{O}_S$ (cf proposition 3.2).

Le morphisme déduit $S \rightarrow \text{Out}(A)$ ne dépend que de M , et pas de f .

3.3. Familles d'automorphismes extérieurs.

3.3.1. Commençons par rappeler l'interprétation classique des automorphismes extérieurs en terme de bimodules (cas ponctuel).

Un A^{en} -module M est inversible s'il existe un A^{en} -module N tel que $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M \simeq A$ comme A^{en} -module. Soit $\text{Pic}(A)$ le groupe des classes d'isomorphisme de A^{en} -modules inversibles.

Soit $f \in \text{Aut}(A)$. Soit A_f le A^{en} -module égal à A comme A -module, où l'action de A° se fait par multiplication à droite précédée de f : c'est la construction de la preuve de la proposition 3.9 pour $S = \text{Spec } k$. Alors, A_f est inversible et on obtient un morphisme de groupes $\text{Aut}(A) \rightarrow \text{Pic}(A)$ qui se factorise en une injection $\text{Out}(A) \rightarrow \text{Pic}(A)$. Elle identifie $\text{Out}(A)$ aux classes de modules M qui sont libres de rang 1 comme A -module et comme A° -module. Le sous-groupe $\text{Out}^K(A)$ s'identifie au noyau du morphisme canonique $\text{Pic}(A) \rightarrow \text{Aut}(K_0(A))$, où $K_0(A)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des A -modules de type fini. En particulier, $\text{Out}^K(A)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\text{Pic}(A)$.

3.3.2. Soit S une variété. On munit la catégorie des $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules d'une structure monoïdale donnée par $M \boxtimes N = M \otimes_{A \otimes \mathcal{O}_S} N$. On pose $M^\vee = \text{Hom}_{A \otimes \mathcal{O}_S}(M, A \otimes \mathcal{O}_S)$.

On note $\text{Pic}_A(S)$ le groupe des classes d'isomorphisme de $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules inversibles. On note $\text{Pic}_A^f(S)$ le groupe des classes d'isomorphisme de $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules M qui sont localement libres de rang 1 comme $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module et comme $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -module. C'est un sous-groupe de $\text{Pic}_A(S)$.

Soit $M \in \text{Pic}_A(S)$ et soit x un point fermé de S . Alors, $M(x)$ est un A^{en} -module inversible et $M(x) \otimes_A -$ induit un automorphisme de $K_0(A)$ (provenant d'une permutation de l'ensemble des classes de modules simples). Si cet automorphisme est trivial, alors $M(x)$ est libre de rang 1 comme A -module et comme A° -module. En particulier, si les automorphismes de $K_0(A)$ sont triviaux pour tout x , alors $M \in \text{Pic}_A^f(S)$.

On dispose d'un morphisme canonique

$$\text{Pic}_A(S) \rightarrow \text{Pic}_{A/JA}(S), \quad M \mapsto A/JA \otimes_A M \otimes_A A/JA$$

se restreignant en $\text{Pic}_A^f(S) \rightarrow \text{Pic}_{A/JA}^f(S)$. On note $\mathcal{B}_A(S)$ le noyau de ce morphisme.

Soient A_1, A_2 deux k -algèbres de dimension finie. On dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}_{A_1}(S) \times \mathcal{B}_{A_2}(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{A_1 \times A_2}(S), (M_1, M_2) \mapsto M_1 \oplus M_2.$$

Soit $\phi : S' \rightarrow S$ un morphisme de variétés. On dispose d'un morphisme canonique $\phi^* : \text{Pic}_A(S) \rightarrow \text{Pic}_A(S')$ se restreignant en $\mathcal{B}_A(S) \rightarrow \mathcal{B}_A(S')$.

3.3.3. Soit $M \in \text{Pic}_A^f(S)$. Il existe un recouvrement ouvert \mathcal{F} de S tel que $M|_U$ est libre de rang 1 comme $(A \otimes \mathcal{O}_U)$ -module et comme $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_U)$ -module, pour tout $U \in \mathcal{F}$. Fixons un isomorphisme de $(A \otimes \mathcal{O}_U)$ -modules $f_U : M|_U \xrightarrow{\sim} A \otimes \mathcal{O}_U$, pour tout $U \in \mathcal{F}$.

On dispose alors (cf §3.2.2), pour $U \in \mathcal{F}$, d'un morphisme $U \rightarrow \text{Aut}(A)$, donc par composition, d'un morphisme $U \rightarrow \text{Out}(A)$. Puisque ces morphismes sont indépendants du choix des f_U (cf §3.2.3), ils se recollent. On obtient ainsi un morphisme $S \rightarrow \text{Out}(A)$. On a ainsi construit un morphisme de groupes $\text{Pic}_A^f(S) \rightarrow \text{Hom}(S, \text{Out}(A))$.

Lemme 3.10. *Il existe $M \in \text{Pic}_A^f(\text{Out}(A))$ induisant l'identité de $\text{Out}(A)$.*

Démonstration. Soit $S = \text{Out}^0(A)$. D'après §3.1.3, il existe un recouvrement ouvert \mathcal{F} de S et des morphismes $\psi_U : U \rightarrow F(A)$ relevant l'immersion ouverte $U \rightarrow \text{Out}^0(A)$ pour $U \in \mathcal{F}$. Quitte à raffiner \mathcal{F} , on peut supposer que $(\psi_U)|_{U \cap V} \times (\psi_V)|_{U \cap V}^{-1} : U \cap V \rightarrow F(A) \cap \text{Int}(A)$ se factorise par $\alpha_{U,V} : U \cap V \rightarrow (1 + J(A)) \rtimes T$, où T est un sous-tore de $(ZS)^\times$ tel que $(ZS)^\times = T \times ((ZA)^\times \cap S^\times)$ (cf §3.1.3). Soit $\rho_U : A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_U$ le morphisme de faisceaux sur U associé à ϕ_U (cf §3.2.1).

Soit $N_U = A \otimes \mathcal{O}_U$ comme $(A \otimes \mathcal{O}_U)$ -module, muni de l'action de A° donnée par multiplication précédée de ρ_U . On a un isomorphisme de $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_{U \cap V})$ -modules $\phi_{U,V} : (N_U)|_{U \cap V} \xrightarrow{\sim} (N_V)|_{U \cap V}$ donné par multiplication à droite par l'élément $\beta_{U,V}$ de $A \otimes \mathcal{O}_{U \cap V}$ défini par $\alpha_{U,V}$.

Soit

$$c_{U,V,W} = (\beta_{U,W})|_{U \cap V \cap W}^{-1} (\beta_{V,W})|_{U \cap V \cap W} (\beta_{U,V})|_{U \cap V \cap W}.$$

On a $c_{U,V,W} \in 1 + J(ZA) \otimes \mathcal{O}_{U \cap V \cap W}$. Soit ζ la classe correspondante dans $\check{H}^2(S, 1 + J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S) \subset H^2(S, 1 + J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S)$. On a $H^2(S, 1 + (JZA)^i / (JZA)^{i+1} \otimes \mathcal{O}_S) = 0$ puisque $1 + (JZA)^i / (JZA)^{i+1} \otimes \mathcal{O}_S$ est un faisceau cohérent et $\text{Out}^0(A)$ est affine. Par conséquent, $H^2(S, 1 + J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S) = 0$, donc $\zeta = 0$. On en déduit qu'il existe un choix des $\alpha_{U,V}$ tel que $c_{U,V,W} = 0$ et les N_U se recollent en un $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -module N . Puisque $A/JA \otimes_A N_U \otimes_A A/JA \simeq A/JA \otimes \mathcal{O}_U$ et $\phi_{U,V}$ induit l'identité $A/JA \otimes_A (N_U)|_{U \cap V} \otimes_A A/JA \xrightarrow{\sim} A/JA \otimes_A (N_V)|_{U \cap V} \otimes_A A/JA$, on déduit que $A/JA \otimes_A N \otimes_A A/JA \simeq A/JA \otimes \mathcal{O}_S$. Par conséquent, $N \in \mathcal{B}_A(S)$. On a montré que N induit l'injection canonique $\text{Out}^0(A) \rightarrow \text{Out}(A)$.

Soit \mathcal{S} un ensemble de représentants des classes à droite $\text{Out}(A) / \text{Out}^0(A)$ (vus comme points fermés de $\text{Out}(A)$). On a $\text{Out}(A) = \coprod_{g \in \mathcal{S}} \text{Out}^0(A)g$. Soit $g \in \mathcal{S}$ et $\tilde{g} \in \text{Aut}(A)$ relevant g . On considère la multiplication à droite $g^{-1} : \text{Out}^0(A)g \rightarrow \text{Out}^0(A)$. Alors, $g^{-1*}(N) \otimes_A A_{\tilde{g}} \in \text{Pic}_A^f(\text{Out}^0(A)g)$ induit l'injection canonique $\text{Out}^0(A)g \rightarrow \text{Out}(A)$. Par conséquent, $M = \bigoplus_{g \in \mathcal{S}} (g^{-1*}M) \otimes_A A_g \in \text{Pic}_A^f(\text{Out}(A))$ induit l'identité de $\text{Out}(A)$. \square

Soit $M \in \text{Pic}_A^f(S)$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert \mathcal{F} de U avec des isomorphismes de $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_U)$ -modules $\phi_U : A \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} M|_U$, pour $U \in \mathcal{F}$. Pour $U, V \in \mathcal{F}$, soit

$$c_{U,V} = (\phi_U)|_{U \cap V}^{-1} \circ (\phi_V)|_{U \cap V} \in \text{End}_{A^\circ \otimes \mathcal{O}_{U \cap V}}(A \otimes \mathcal{O}_{U \cap V}) = (ZA \otimes \mathcal{O}_{U \cap V})^\times.$$

Les $c_{U,V}$ définissent une classe de cohomologie de Čech dans $\check{H}^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) = H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times)$.

Réciproquement, un 1-cocycle de Čech à valeurs dans $(ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times$ définit un recollement des $A \otimes \mathcal{O}_U$ en un $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -module dans $\text{Pic}_A^f(S)$ et on obtient un morphisme canonique $H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \rightarrow \text{Pic}_A^f(S)$, inverse à droite du précédent.

Proposition 3.11. *On a un diagramme commutatif de suites horizontales et verticales exactes et dont les suites horizontales et la suite verticale gauche sont scindées*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & H^1(S, 1 + JZA \otimes \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathcal{B}_A(S) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & \text{Hom}(S, \text{Out}^K(A)) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) & \longrightarrow & \text{Pic}_A^f(S) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & \text{Hom}(S, \text{Out}(A)) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & H^1(S, (ZA/JZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) & \longrightarrow & \text{Pic}_{A/JA}^f(S) & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & \text{Hom}(S, \text{Out}(A/JA)) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Démonstration. L'exactitude de

$$1 \rightarrow H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \rightarrow \text{Pic}_A^f(S) \rightarrow \text{Hom}(S, \text{Out}(A))$$

résulte de l'étude ci-dessus et de §3.2.3.

Soit $M \in \text{Pic}_A^f(\text{Out}(A))$ fourni par le lemme 3.10. Soit $\pi : S \rightarrow \text{Out}(A)$. Alors, $\pi^*M \in \text{Pic}_A^f(S)$ et on définit ainsi un morphisme de groupes $\text{Hom}(S, \text{Out}(A)) \rightarrow \text{Pic}_A^f(S)$, scission du morphisme canonique. Ce morphisme se restreint en $\text{Hom}(S, \text{Out}^K(A)) \rightarrow \mathcal{B}_A(S)$.

La suite exacte

$$1 \rightarrow 1 + JZA \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times \rightarrow (ZA/J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S)^\times \rightarrow 1$$

est scindée :

$$(ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times = (1 + JZA \otimes \mathcal{O}_S) \times (((ZA)^\times \cap S_0^\times) \times \mathcal{O}_S^\times)$$

où S_0 est une sous-algèbre semi-simple maximale de A . On en déduit que la suite verticale gauche est exacte et scindée. \square

Remarque 3.12. Le sous-groupe $\mathcal{B}_A(S)/H^1(S, 1+J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S)$ de $\text{Pic}_A(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times)$ consiste en les éléments qui induisent un automorphisme trivial de $K_0(A)$ en tout point fermé.

Remarque 3.13. On a $H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) = \text{Pic}(S \times \text{Spec } ZA)$. Si \mathcal{L} est un fibré inversible sur $S \times \text{Spec } ZA$, alors on lui associe $M = \mathcal{L} \otimes_{ZA} A \in \text{Pic}_A^f(S)$.

3.3.4. Soit S une variété. Soit $\overline{\text{Pic}}_A^f(S)$ le quotient du groupe des classes d'isomorphisme de $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -bimodules qui sont localement libres de rang 1 comme $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules et comme $(A^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules par le sous groupe des bimodules de la forme $\mathcal{L} \otimes_{ZA} A$, où \mathcal{L} est un fibré inversible sur $S \times \text{Spec } ZA$. La proposition 3.11 décrit ce foncteur :

Théorème 3.14. *Le foncteur $\overline{\text{Pic}}_A^f$ est représenté par $\text{Out}(A)$.*

Supposons maintenant que S est un groupe algébrique. Soit $M \in \text{Pic}_A^f(S)$. Alors, M induit un morphisme de groupes algébriques $S \rightarrow \text{Out}(A)$ si et seulement si $m^*M \simeq M \otimes_A M$, où $m : S \times S \rightarrow S$ est la multiplication.

4. INVARIANCE DU GROUPE DES AUTOMORPHISMES EXTÉRIEURS

Soient A et B deux k -algèbres de dimension finie.

4.1. Equivalences de Morita. Soient L un $(A \otimes B^\circ)$ -module et L' un $(B \otimes A^\circ)$ -module tels que

$$L \otimes_B L' \simeq A \text{ comme } B^{\text{en}}\text{-modules}$$

$$L' \otimes_A L \simeq B \text{ comme } B^{\text{en}}\text{-modules.}$$

Soit S une variété. Les foncteurs $L' \otimes_A - \otimes_A L$ et $L \otimes_B - \otimes_B L'$ induisent des isomorphismes inverses $\Psi_L : \text{Pic}_A(S) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_B(S)$ et $\Psi_{L'} : \text{Pic}_B(S) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_A(S)$.

Lemme 4.1. *Les isomorphismes Ψ_L et $\Psi_{L'}$ se restreignent en des isomorphismes inverses*

$$H^1(S, 1 + J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S) \xrightleftharpoons{\sim} H^1(S, 1 + J(ZB) \otimes \mathcal{O}_S) .$$

Ils induisent en des isomorphismes inverses

$$\mathcal{B}_A(S)/H^1(S, 1 + J(ZA) \otimes \mathcal{O}_S) \xrightleftharpoons{\sim} \mathcal{B}_B(S)/H^1(S, 1 + J(ZB) \otimes \mathcal{O}_S) .$$

Démonstration. Soit $M \in \text{Pic}_A(S)$ localement isomorphe à $A \otimes \mathcal{O}_S$. Alors, $\Psi_L(M)$ est localement isomorphe à $B \otimes \mathcal{O}_S$, donc Ψ_L et $\Psi_{L'}$ se restreignent en des isomorphismes inverses

$$H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \xrightleftharpoons{\sim} H^1(S, (ZB \otimes \mathcal{O}_S)^\times) .$$

Pour la deuxième partie du lemme, il suffit de noter que si $M(x)$ induit un automorphisme trivial de $K_0(A)$, alors $\Psi_L(M)(x)$ induit un automorphisme trivial de $K_0(B)$ (cf remarque 3.12). \square

Le résultat suivant (pour les groupes réduits) est du à Brauer [Po, Corollaire 2.2].

Théorème 4.2. *Une équivalence $A\text{-mod} \xrightarrow{\sim} B\text{-mod}$ induit un isomorphisme de groupes algébriques $\text{Out}^K(A) \xrightarrow{\sim} \text{Out}^K(B)$, donc par restriction un isomorphisme $\text{Out}^0(A) \xrightarrow{\sim} \text{Out}^0(B)$.*

Démonstration. Le lemme 4.1 et la proposition 3.11 fournissent l'isomorphisme $\text{Out}^K(A) \xrightarrow{\sim} \text{Out}^K(B)$. \square

Remarque 4.3. Soit $A = k \times M_2(k)$ et $B = k \times k$. Alors, $\text{Aut}(A) = \text{GL}_2(k)$, $\text{Out}(A) = 1$, $\text{Aut}(B) = \mathbf{Z}/2$ et $\text{Out}(B) = \mathbf{Z}/2$. On voit dans ce cas que $\text{Aut}^0(A) \not\simeq \text{Aut}^0(B)$ et que $\text{Out}(A) \not\simeq \text{Out}(B)$.

Le théorème montre que l'action par conjugaison de $\text{Pic}(A)$ sur $\text{Out}^0(A)$ est algébrique. Ceci permet de munir $\text{Pic}(A)$ d'une structure de groupe algébrique (la structure de variété est donnée par l'union disjointe de copies de $\text{Out}^0(A)$ paramétrées par $\text{Pic}(A)/\text{Out}^0(A)$). Alors, l'isomorphisme du théorème 4.2 s'étend en un isomorphisme de groupes algébriques entre $\text{Pic}(A)$ et $\text{Pic}(B)$.

4.2. Equivalences dérivées.

4.2.1.

Lemme 4.4. *Soit C un complexe parfait de \mathcal{O}_S -modules et $x \in S$ tel que $H^i(C \otimes_{\mathcal{O}_S}^{\mathbf{L}} k(x)) = 0$ pour $i \neq 0$. Alors, il existe un voisinage ouvert Ω de x tel que $H^i(C|_{\Omega}) = 0$ pour $i \neq 0$.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme entre \mathcal{O}_S -modules libres de type fini.

Si $f \otimes_{\mathcal{O}_S} k(x)$ est surjectif, alors f est surjectif dans un voisinage ouvert de x . Par dualité, on en déduit que si $f \otimes_{\mathcal{O}_S} k(x)$ est injectif, alors f est une injection scindée dans un voisinage ouvert de x .

Cela démontre le lemme lorsque C est un complexe borné de \mathcal{O}_S -modules libres de type fini. On en déduit alors le lemme lorsque C est parfait, puisque qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que $C|_U$ est quasi-isomorphe à un complexe borné de \mathcal{O}_U -modules libres de type fini. \square

4.2.2. Soient $L \in D^b(A \otimes B^\circ)$ et $L' \in D^b(B \otimes A^\circ)$ tels que

$$L \otimes_B^{\mathbf{L}} L' \simeq A \text{ dans } D^b(A^{\text{en}})$$

$$L' \otimes_A^{\mathbf{L}} L \simeq B \text{ dans } D^b(B^{\text{en}}).$$

Soit S une variété. Soit $\text{DPic}_A(S)$ le groupe des classes d'isomorphisme d'objets inversibles de $D^b(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ (l'inversibilité est définie comme en §3.3.2). Les foncteurs $L' \otimes_A^{\mathbf{L}} - \otimes_A^{\mathbf{L}} L$ et $L \otimes_B^{\mathbf{L}} - \otimes_B^{\mathbf{L}} L'$ induisent des isomorphismes inverses $\Psi_L : \text{DPic}_A(S) \xrightarrow{\sim} \text{DPic}_B(S)$ et $\Psi_{L'} : \text{DPic}_B(S) \xrightarrow{\sim} \text{DPic}_A(S)$.

Soit $\text{Pic}_A^0(S)$ le sous-groupe de $\text{Pic}_A^f(S)$ des éléments induisant un morphisme $S \rightarrow \text{Out}^0(A)$.

Lemme 4.5. *Les isomorphismes Ψ_L et $\Psi_{L'}$ induisent des isomorphismes inverses*

$$\text{DPic}_A(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \xrightarrow[\sim]{\sim} \text{DPic}_B(S)/H^1(S, (ZB \otimes \mathcal{O}_S)^\times).$$

Ils se restreignent en des isomorphismes inverses

$$\text{Pic}_A^0(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \xrightarrow[\sim]{\sim} \text{Pic}_B^0(S)/H^1(S, (ZB \otimes \mathcal{O}_S)^\times).$$

Démonstration. La première assertion est toute aussi immédiate que dans le lemme 4.1.

Soit $S = \text{Out}^0(A)$ et $M \in \mathcal{B}_A(S)$ correspondant à l'injection $\text{Out}^0(A) \rightarrow \text{Out}(A)$. Soit $N = \Psi_L(M)$. On a $N(1) \simeq B$. Il résulte du lemme 4.4 qu'il existe un voisinage ouvert U de 1 dans S tel que $N|_U$ n'a de l'homologie qu'en degré 0 et quitte à rétrécir U , on peut supposer que $H^0(N)|_U$ est libre de rang 1 comme $(B \otimes \mathcal{O}_U)$ -module et comme $(B^\circ \otimes \mathcal{O}_U)$ -module.

On a $N(g) \otimes_B^{\mathbf{L}} N(h) \simeq N(gh)$ pour $g, h \in S$. Si $N(g)$ et $N(h)$ n'ont de l'homologie qu'en degré 0 et que celle-ci est libre de rang 1 comme B -module et comme B° -module, alors $N(gh)$ n'a de l'homologie qu'en degré 0 et celle-ci est libre de rang 1 comme B -module et comme B° -module. Par conséquent, puisque U engendre le groupe algébrique connexe $\text{Out}^0(A)$, cette propriété est vraie pour tout $g \in S$: N n'a de l'homologie qu'en degré 0 et $H^0(N)$ est localement libre de rang 1 comme $(B \otimes \mathcal{O}_S)$ -module et comme $(B^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -module. Par conséquent, $\Psi_L(M) \in \text{Pic}_B^f(S)$.

Tout élément de $\text{Pic}_A^0(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times)$ est de la forme ϕ^*M , où $\phi : S \rightarrow \text{Out}^0(A)$ est un morphisme. On a $\Psi_L \phi^*M \simeq \phi^* \Psi_L(M) \in \text{Pic}_B^0(S)$ d'après ce qui précède. On déduit donc que Ψ_L et $\Psi_{L'}$ induisent des isomorphismes inverses

$$\text{Pic}_A^0(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \xrightarrow[\sim]{\sim} \text{Pic}_B^0(S)/H^1(S, (ZB \otimes \mathcal{O}_S)^\times).$$

\square

Le résultat suivant a été obtenu indépendamment, et par des méthodes différentes, par B. Huisgen-Zimmermann et M. Saorin [HuiSa]. Ce résultat avait été établi pour des équivalences dérivées particulières auparavant [GuSa].

Théorème 4.6. *Une équivalence $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(B)$ induit un isomorphisme de groupes algébriques $\text{Out}^0(A) \xrightarrow{\sim} \text{Out}^0(B)$.*

Démonstration. La théorie de Rickard [Ri] fournit des complexes L et L' comme plus haut. Le théorème résulte alors du lemme 4.5 et du théorème 3.14. \square

4.2.3. Soit $\text{DPic}(A)$ le groupe des classes d'isomorphisme d'objets inversibles de $D^b(A^{\text{en}})$ (ce groupe a été introduit dans [RouZi, Ye1]). Comme l'explique Yekutieli [Ye2], le théorème précédent montre que $\text{Out}^0(A)$ est un sous-groupe distingué de $\text{DPic}(A)$ et que l'action de $\text{DPic}(A)$ par conjugaison sur $\text{Out}^0(A)$ produit des automorphismes de groupe algébrique. Ceci fournit une structure de groupe localement algébrique (=schéma en groupes séparé localement de type fini sur k) sur l'union disjointe de copies de $\text{Out}^0(A)$ paramétrées par le quotient $\text{DPic}(A)/\text{Out}^0(A)$.

On a finalement une famille de groupes (localement) algébriques, de composante identité $\text{Out}^0(A)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{distingué} & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ \text{Out}^0(A) & \hookrightarrow & \text{Out}^K(A) & \hookrightarrow & \text{Out}(A) & \hookrightarrow & \text{Pic}(A) \hookrightarrow \text{DPic}(A) \\ & & \curvearrowleft & & & & \\ & & \text{distingué} & & & & \end{array}$$

4.3. **Equivalences stables à la Morita.** Soit S une variété.

4.3.1. *Rigidité des modules projectifs.* Soit A une k -algèbre de dimension finie.

Lemme 4.7. *Soit M un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module, localement libre de type fini comme \mathcal{O}_S -module. Soit x un point fermé de S tel que $P = M(x)$ est un A -module projectif. Alors, il existe un voisinage ouvert Ω de x tel que $M|_{\Omega}$ est isomorphe à $P \otimes \mathcal{O}_{\Omega}$.*

Démonstration. On peut supposer $S = \text{Spec } R$, une variété affine. Considérons le morphisme canonique $f : M \rightarrow P = M/\mathfrak{m}_x M \simeq M \otimes_R R/\mathfrak{m}_x$. Le morphisme canonique $P \otimes R \rightarrow P \otimes R/\mathfrak{m}_x = P$ se factorise par f en $g : P \otimes R \rightarrow M$. Comme fg est surjectif, il existe un voisinage ouvert Ω de x tel que $g|_{\Omega}$ est surjectif. Puisque le rang de M sur R est la dimension de $M \otimes_R R/\mathfrak{m}_x$, c'est aussi le rang de $P \otimes R$ sur R . Par conséquent, $g|_{\Omega}$ est un isomorphisme. \square

4.3.2. *Rigidité des facteurs projectifs.* Soit M un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module de type fini. On note ρ_M l'application canonique

$$\rho_M : \text{Hom}_{A \otimes \mathcal{O}_S}(M, A \otimes \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Hom}_{A \otimes \mathcal{O}_S}(M, A/J(A) \otimes \mathcal{O}_S).$$

On pose $\bar{M} = M/\bigcap_{f \in \text{im } \rho_M} \ker f$. C'est un $(A/J(A) \otimes \mathcal{O}_S)$ -module.

Si P est un A -module projectif et $M = P \otimes \mathcal{O}_S$, alors ρ_M est surjectif et $\bar{M} = \text{hd}(P) \otimes \mathcal{O}_S$ (pour un A -module V , on note $\text{hd}(V)$ le plus grand quotient semi-simple de V).

4.3.3. *Cas ponctuel.* Nous rappelons comment trouver un facteur direct projectif maximal lorsque $S = \operatorname{Spec} k$.

Le quotient \bar{M} de M est le plus grand tel que l'application canonique $M \rightarrow \bar{M}$ est projective :

Lemme 4.8. *Supposons $S = \operatorname{Spec} k$ et soit M un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module de type fini. Alors, M a un facteur direct projectif non nul si et seulement si ρ_M est non nulle.*

Soit $P \rightarrow \bar{M}$ une enveloppe projective de \bar{M} . Alors, l'application canonique $M \rightarrow \bar{M}$ se factorise en un morphisme surjectif $M \rightarrow P$ dont le noyau n'a pas de facteur direct projectif non nul.

Démonstration. Soit $f \in \operatorname{Hom}_A(M, A)$ tel que $\operatorname{im} f \not\subseteq JA$. Alors, il existe un A -module simple S et un morphisme de A -modules $A \rightarrow S$ tel que le composé $M \rightarrow A \rightarrow S$ est non nul. Ce composé se factorise par une enveloppe projective $P_S \rightarrow S$ de S en un morphisme $M \rightarrow P_S$, qui est surjectif (lemme de Nakayama). Par conséquent, P_S est facteur direct de M .

Réciproquement, si M est projectif, alors $\bar{M} = \operatorname{hd}(M)$ et ρ_M est non nul. La deuxième partie du lemme est claire. \square

4.3.4. *Rigidité locale.* Pour le reste de §4.3, nous supposons A auto-injective (*i.e.*, A est un A -module injectif).

Le résultat suivant est classique (cf [DoFl, Corollaire 16] et [Da, Théorème 3.16]).

Lemme 4.9. *Soit M un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module, localement libre de type fini comme \mathcal{O}_S -module. Soit x un point fermé de S et soit P un A -module projectif facteur direct de $M(x)$. Alors, il existe un voisinage ouvert Ω de x tel que $P \otimes \mathcal{O}_\Omega$ est facteur direct de $M|_\Omega$.*

Démonstration. On peut supposer $S = \operatorname{Spec} R$, une variété affine. Puisque A est auto-injective, P^* est un A -module à droite projectif. On a $\operatorname{Ext}_{A \otimes R}^1(M, P \otimes \mathfrak{m}_x) \simeq \operatorname{Ext}_R^1(P^* \otimes_A M, \mathfrak{m}_x)$ (cf par exemple [Rou1, §2.2.2]). Puisque $P^* \otimes_A M$ est un R -module projectif, on a donc $\operatorname{Ext}_{A \otimes R}^1(M, P \otimes \mathfrak{m}_x) = 0$. Par conséquent, un morphisme surjectif $M \rightarrow P = P \otimes R/\mathfrak{m}_x$ se relève en morphisme $M \rightarrow P \otimes \mathcal{O}_S$. Ce morphisme est alors surjectif (et donc scindé) dans un voisinage ouvert Ω de x . \square

Remarque 4.10. Le résultat n'est pas vrai pour des algèbres non auto-injectives, même lorsque $S = \operatorname{Spec} R$ avec R locale.

Prenons pour A l'algèbre des matrices triangulaires supérieures 2×2 sur k , $R = k[t]_{(t)}$ et $M = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ bt \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$. Alors, M est un $(A \otimes R)$ -module indécomposable non projectif et R -libre, mais $M \otimes_R k$ est somme directe des deux A -modules simples, l'un d'eux étant projectif.

Plus généralement, soit A une k -algèbre de dimension finie qui n'est pas auto-injective et soit P un A -module projectif indécomposable non injectif. Soit $f : P \rightarrow I$ une enveloppe injective et $N = \operatorname{coker} f$. Soit $\zeta \in \operatorname{Ext}_A^1(N, P)$ déterminé par l'extension. Soit $\xi = t\zeta \in \operatorname{Ext}_{A \otimes R}^1(N \otimes R, P \otimes R)$ et M le $(A \otimes R)$ -module extension de $N \otimes R$ par $P \otimes R$ déterminé par cette classe. Alors, le facteur direct projectif P de $M \otimes_R k$ ne se remonte pas en un facteur direct projectif de M .

4.3.5. *Cas général.* Sous certaines hypothèses, on peut “recoller” les facteurs directs projectifs.

Proposition 4.11. *Soit S une variété affine. Soit M un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module, localement libre de type fini comme \mathcal{O}_S -module et soit P un A -module projectif. Supposons*

(i) pour tout point fermé x , le A -module P est facteur direct de $M(x)$

(ii) pour tout point générique η d'une composante irréductible de S , le $A \otimes \mathcal{O}_\eta$ -module M_η n'a pas de facteur direct projectif contenant strictement $P \otimes \mathcal{O}_\eta$.

Alors, il existe un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module projectif Q facteur direct de M tel que $Q(x) \simeq P$ pour tout point fermé x .

Démonstration. Soit x un point fermé de S . D'après le lemme 4.9, il existe un $(A \otimes \mathcal{O}_x)$ -module M' tel que $M_x \simeq M' \oplus P \otimes \mathcal{O}_x$. Si η est un point générique dont l'adhérence contient x , alors le morphisme $\rho_{M'_\eta}$ est nul puisque M'_η n'a pas de facteur direct projectif (lemme 4.8). On en déduit que $\rho_{M'}$ est nul, puisque \mathcal{O}_x est réduit. Par conséquent, $(\bar{M})_x \simeq \overline{(M_x)} \simeq \text{hd}(P) \otimes \mathcal{O}_x$.

Le $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module \bar{M} est donc un \mathcal{O}_S -module projectif. Puisqu'il est A -semi-simple, il est somme directe de modules $S \otimes F_S$, où S décrit les classes d'isomorphisme de A -modules simples et F_S est un \mathcal{O}_S -module projectif. Fixons alors un morphisme surjectif $h : Q = \bigoplus_S P_S \otimes F_S \rightarrow \bar{M}$. Ce morphisme se factorise par la surjection canonique $M \rightarrow \bar{M}$ en $g : Q \rightarrow M$. Le morphisme $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(g, \mathcal{O}_S)$ est surjectif, car il l'est en tout point fermé. Puisque $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(Q, \mathcal{O}_S)$ est un $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -module projectif, le morphisme $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(g, \mathcal{O}_S)$ est donc une surjection scindée et finalement g est une injection scindée. \square

Remarque 4.12. L'hypothèse aux points génériques n'est pas superflue.

Soit $S = U \cup V$ un recouvrement ouvert de S avec $U, V \neq S$ et M', M'' des $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules indécomposables, \mathcal{O}_S -projectifs mais non $(A \otimes \mathcal{O}_S)$ -projectifs, tels que $M'|_U \simeq P \otimes \mathcal{O}_U$ et $M''|_V \simeq P \otimes \mathcal{O}_V$ pour un A -module projectif P . Alors, $M = M' \oplus M''$ ne possède pas de facteur direct projectif, bien que P soit facteur direct de $M(x)$ pour tout point fermé x .

Le lemme suivant montre qu'il n'est pas nécessaire de travailler avec un schéma réduit.

Lemme 4.13. Soit R une k -algèbre commutative, I un idéal nilpotent de R et M un $(A \otimes R)$ -module de type fini, projectif comme R -module. Alors, tout facteur direct projectif de $M \otimes_R R/I$ se relève en un facteur direct projectif de M .

Démonstration. Un $(A \otimes R/I)$ -module projectif indécomposable de type fini est de la forme $P \otimes L$ où P est un A -module projectif indécomposable et L un R/I -module projectif de type fini. Puisque tout idempotent se relève à travers le morphisme canonique $\text{End}_R(R^n) \rightarrow \text{End}_{R/I}((R/I)^n)$, alors, il existe un R -module projectif de type fini L' tel que $L' \otimes_R R/I \simeq L$. Par conséquent, un $(A \otimes R/I)$ -module projectif de type fini se relève en un $(A \otimes R)$ -module projectif de type fini.

Soit donc N un $(A \otimes R)$ -module projectif et $f : M \rightarrow N \otimes_R R/I$ un morphisme surjectif. On a $\text{Ext}_{A \otimes R}^1(M, N \otimes_R I) \simeq \text{Ext}_R^1(\text{Hom}_R(N, R) \otimes_{A \otimes R} M, I) = 0$ et on déduit comme dans la preuve du lemme 4.9 que f se relève en un morphisme surjectif $M \rightarrow N$. \square

4.3.6. Invariance stable. Supposons A et B auto-injectives. Soient L un $(A \otimes B^\circ)$ -module de type fini et L' un $(B \otimes A^\circ)$ -module de type fini induisant des équivalences stables inverses entre A et B , i.e., tels que

$$L \otimes_B L' \simeq A \oplus \text{projectif comme } A^{\text{en}}\text{-modules}$$

$$L' \otimes_A L \simeq B \oplus \text{projectif comme } B^{\text{en}}\text{-modules.}$$

Soit S une variété. Soit $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)\text{-stab}$ le quotient additif de la catégorie des $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -modules de type fini par la sous-catégorie additive des modules localement projectifs.

Soit $\text{StPic}_S(A)$ le groupe des classes d'isomorphisme des objets inversibles de $(A^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)\text{-stab}$.

Les foncteurs $L' \otimes_A - \otimes_A L$ et $L \otimes_B - \otimes_B L'$ induisent des isomorphismes inverses $\Psi_L : \text{StPic}_A(S) \xrightarrow{\sim} \text{StPic}_B(S)$ et $\Psi_{L'} : \text{StPic}_B(S) \xrightarrow{\sim} \text{StPic}_A(S)$.

Supposons A et B sans modules simples projectifs. Alors, le morphisme canonique $\text{Pic}_A(S) \rightarrow \text{StPic}_A(S)$ est injectif (on le déduit immédiatement du cas ponctuel).

Lemme 4.14. *Supposons A et B sans modules simples projectifs. Les isomorphismes Ψ_L et $\Psi_{L'}$ induisent des isomorphismes inverses*

$$\text{StPic}_A(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \xrightarrow{\sim} \text{StPic}_B(S)/H^1(S, (ZB \otimes \mathcal{O}_S)^\times).$$

Ils se restreignent en des isomorphismes inverses

$$\text{Pic}_A^0(S)/H^1(S, (ZA \otimes \mathcal{O}_S)^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}_B^0(S)/H^1(S, (ZB \otimes \mathcal{O}_S)^\times).$$

Démonstration. La première assertion est toute aussi immédiate que dans le lemme 4.1.

Soit $S = \text{Out}^0(A)$ et $M \in \mathcal{B}_A(S)$ correspondant à l'injection $\text{Out}^0(A) \rightarrow \text{Out}(A)$. Soit $N = \Psi_L(M)$. On a $N(1) \simeq B \oplus P$, où P est un B^{en} -module projectif de type fini.

Soit H l'ensemble des points fermés g de S tels qu'il existe un B^{en} -module R libre de rang 1 comme B -module et comme B° -module avec $N(g) \simeq R \oplus P$.

D'après le lemme 4.9, il existe un voisinage ouvert Ω de l'identité de S et un $(B^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_\Omega)$ -module T tels que $N|_\Omega \simeq T \oplus P \otimes \mathcal{O}_\Omega$. En particulier, P est facteur direct de $N(g)$ pour tout $g \in \Omega$.

Puisque $T(1) = B$ est libre de rang 1 comme B -module et comme B° -module, il existe un voisinage ouvert U de l'identité dans Ω tel que $T|_U$ est libre de rang 1 comme $(B \otimes \mathcal{O}_U)$ -module et comme $(B^\circ \otimes \mathcal{O}_U)$ -module (lemme 4.9). Alors, l'ensemble des points fermés de U est contenu dans H .

Au point générique η de \mathcal{O}_S , le module T_η ne contient pas de facteur direct projectif non nul, car l'algèbre $B \otimes \mathcal{O}_\eta$ ne contient pas de facteur direct simple.

Soient $g, h \in S$. Alors, $N(g) \otimes_B N(h) \simeq N(gh) \oplus \text{projectif}$. Prenons $g, h \in H$ et décomposons $N(g) \simeq R_1 \oplus P$ et $N(h) \simeq R_2 \oplus P$. Alors, $N(gh) \simeq R_1 \otimes_B R_2 \oplus Q$ où Q est projectif. Puisque R_1 et R_2 sont libres de rang 1 comme B -modules et comme B° -modules, on en déduit que $R_1 \otimes_B R_2$ est aussi libre de rang 1 comme B -module et comme B° -module. Dans un voisinage ouvert V de gh , on a $N \simeq R \oplus Q \otimes \mathcal{O}_V$ où R est localement libre de rang 1 comme $(B \otimes \mathcal{O}_V)$ -module et comme $(B^\circ \otimes \mathcal{O}_V)$ -module. Alors, $Q \otimes \mathcal{O}_\eta \simeq P \otimes \mathcal{O}_\eta$, donc $Q \simeq P$. Par conséquent, $gh \in H$.

Ainsi, H est un sous-groupe de S . Puisqu'il contient les points fermés d'un ouvert de S , c'est S tout entier, car S est connexe.

La proposition 4.11 montre l'existence d'un $(B^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -module W et d'un $(B^{\text{en}} \otimes \mathcal{O}_S)$ -module projectif Z tels que $N \simeq W \oplus Z$ et $Z(g) \simeq P$ pour tout $g \in S$. En outre, W est localement libre de rang 1 comme $(B \otimes \mathcal{O}_S)$ -module et comme $(B^\circ \otimes \mathcal{O}_S)$ -module. Par conséquent, $\Psi_L(M) \simeq S \in \text{Pic}_B^f(S)$. On conclut maintenant comme dans le lemme 4.5. \square

Théorème 4.15. *Une équivalence stable à la Morita entre A et B induit un isomorphisme de groupes algébriques $\text{Out}^0(A) \xrightarrow{\sim} \text{Out}^0(B)$.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où A et B n'ont pas de modules simples projectifs. Le théorème résulte alors du lemme 4.14 et du théorème 3.14. \square

Remarque 4.16. Soit R une k -algèbre locale noethérienne commutative et V un $(B \otimes R)$ -module, libre de type fini sur R , tel que $V \otimes_R k$ n'a pas de facteur direct projectif. Alors, il existe un $(A \otimes R)$ -module W , libre de type fini sur R , tel que $L \otimes_B V \simeq W \oplus P \otimes R$, où P est un A -module projectif et $W \otimes_R k$ n'a pas de facteur direct projectif (lemme 4.9). En d'autres termes, si V' est un B -module de type fini et $L \otimes_B V' \simeq W' \oplus \text{projectif}$, alors une déformation

de V' s'envoie sur une déformation de W' . En particulier, V' est rigide si et seulement si W' est rigide.

4.4. Equivalences dérivées de variétés projectives lisses.

4.4.1. Soit X une variété projective lisse sur k . On note p_1 et p_2 les premières et deuxièmes projections $X \times X \rightarrow X$.

Soit S un schéma séparé de type fini sur k . On note $\tilde{\mathcal{P}}_X(S)$ le groupe des classes d'isomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times X \times S}$ -modules M cohérents localement libres sur S tels que $p_{1*}(M(s))$ et $p_{2*}(M(s))$ sont des fibrés en droite numériquement nuls sur X , pour tout $s \in S$. Soit $\mathcal{P}_X(S)$ le quotient de $\tilde{\mathcal{P}}_X(S)$ par $\text{Pic}(S)$.

Soit $\mathcal{L} \in \text{Pic}^0(X \times S)$ et $\sigma : S \rightarrow \text{Aut}(X)$. On note $\Delta_\sigma : X \times S \rightarrow X \times X \times S$ le plongement du graphe relatif de σ , i.e., $\Delta_\sigma(x, s) = (x, \sigma(s)(x), s)$. Alors, $\Delta_{\sigma*}\mathcal{L} \in \tilde{\mathcal{P}}_X(S)$ et on obtient ainsi un morphisme canonique

$$\text{Pic}^0(X \times S) \rtimes \text{Hom}(S, \text{Aut}(X)) \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_X(S).$$

Proposition 4.17. *On a un isomorphisme canonique de groupes*

$$\text{Pic}^0(X/S) \rtimes \text{Hom}(S, \text{Aut}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_X(S).$$

En d'autres termes, le foncteur $\mathcal{P}_X(?)$ est représenté par $\text{Pic}^0(X) \rtimes \text{Aut}(X)$.

Démonstration. Soit $p_{13} : X \times X \times S \rightarrow X \times S$ la projection sur les premières et troisièmes composantes. Soit $M \in \tilde{\mathcal{P}}_X(S)$ tel que $p_{13*}M \simeq \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_S$. Alors, il existe un unique $\sigma : S \rightarrow \text{Aut}(X)$ tel que $M \simeq \mathcal{O}_{\Delta_\sigma(X \times S)}$. La proposition en découle. \square

4.4.2. Soit Y une variété projective lisse sur k et $L \in D^b(X \times Y)$. On pose $\Phi_L = Rp_{1*}(L \otimes^{\mathbf{L}} p_2^*(-)) : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$ où $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ et $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ sont les premières et deuxièmes projections. Pour $L' \in D^b(Y \times X)$, on pose $L \boxtimes_Y L' = p_{13*}(p_{12}^*L \otimes^{\mathbf{L}} p_{23}^*L')$.

Le résultat suivant est présenté dans [Huy, Proposition 9.45] et annoncé dans [Rou2, §3.2.1].

Théorème 4.18. *Une équivalence $D^b(Y) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$ induit un isomorphisme de groupes algébriques $\text{Pic}^0(Y) \rtimes \text{Aut}^0(Y) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(X) \rtimes \text{Aut}^0(X)$.*

Démonstration. Il existe $L \in D^b(X \times Y)$ tel que l'équivalence est isomorphe à Φ_L [Or1]. Soit $L' = R\text{Hom}(L, \mathcal{O}_{X \times Y}) \in D^b(Y \times X)$. Alors, $L \boxtimes_Y L' \simeq \mathcal{O}_{\Delta(X)}$, où $\Delta(X)$ est la diagonale dans $X \times X$. Soit $S = \text{Pic}^0(Y) \rtimes \text{Aut}^0(Y)$ et soit $N \in \mathcal{P}_Y(S)$ correspondant à l'identité via la proposition 4.17. Soit $N = L \boxtimes_Y M \boxtimes_Y L' \in D^b(X \times X \times S)$. Alors, la fibre à l'identité de N est isomorphe à $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert Ω de l'identité dans S tel que $N|_\Omega$ a ses faisceaux de cohomologie nuls en dehors du degré 0. Quitte à rétrécir Ω , on a $N|_\Omega \in \mathcal{P}_X(\Omega)$ et on conclut comme dans la preuve du lemme 4.5, via la proposition 4.17. \square

Remarque 4.19. Dans le cas où X et Y sont des variétés abéliennes, on retrouve un résultat d'Orlov [Or2] : une équivalence $D^b(Y) \simeq D^b(X)$ induit un isomorphisme $Y \times \hat{Y} \xrightarrow{\sim} X \times \hat{X}$.

Remarque 4.20. Le lecteur intéressé pourra formuler une généralisation des théorèmes 4.6 et 4.18 au cas d'une \mathcal{O}_X -algèbre finie, où X est une variété projective lisse.

5. ALGÈBRES GRADUÉES

5.1. Généralités.

5.1.1. *Dictionnaire.* Soit A une k -algèbre de dimension finie. Une graduation sur A correspond à la donnée d'une action algébrique de \mathbf{G}_m sur A , i.e., à un morphisme de groupe algébriques $\pi : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$. Pour $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$, alors $x \in k^*$ agit sur A_i par multiplication par x^i .

Cela correspond à son tour à la donnée d'un morphisme d'algèbres $\rho : A \rightarrow A[t, t^{-1}]$. On a $\rho(a) = at^i$ pour $a \in A_i$. Ce morphisme vérifie les propriétés suivantes :

- (invertibilité) Le morphisme $\rho \otimes 1 : A[t, t^{-1}] \rightarrow A[t, t^{-1}]$ est un isomorphisme, c'est-à-dire, la composition $\rho_x : A \xrightarrow{\rho} A[t, t^{-1}] \rightarrow A[t, t^{-1}]/(t - x) = A$ est un isomorphisme pour tout $x \in k^\times$;
- (multiplicativité) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & A \otimes k[t, t^{-1}] \\ \rho \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \mu \\ A \otimes k[t, t^{-1}] & \xrightarrow{\rho \otimes 1} & A \otimes k[t, t^{-1}] \otimes k[t, t^{-1}] \end{array}$$

où $\mu : k[t, t^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}] \otimes k[t, t^{-1}]$, $t \mapsto t \otimes t$ est la comultiplication.

On obtient alors un $(A \otimes A^\circ)[t, t^{-1}]$ -module X à partir d'une graduation. On a $X = A[t, t^{-1}]$ comme $A[t, t^{-1}]$ -module et A agit à droite par multiplication précédée de ρ : pour $x \in X$ et $a \in A_i$, alors $x \cdot a = t^i xa$.

5.1.2. *Relèvement d'actions de tores.* Soit A une k -algèbre de dimension finie et G un tore sur k agissant sur A .

La proposition suivante est classique.

Proposition 5.1. *Soit M un A -module de type fini tel que $A_g \otimes_A M \simeq M$ pour tout $g \in G$. Alors, M s'étend en un $(A \rtimes G)$ -module. Si M est indécomposable, alors cette extension est unique à multiplication par un caractère de G près et à isomorphisme près.*

Démonstration. Soit A' l'image de A dans $\text{End}_k(M)$. Soit \tilde{G} le sous-groupe de $G \times \text{End}_k(M)^\times$ formé des paires d'éléments qui ont la même action sur A' (i.e., les (g, f) tels que $\rho(g(a)) = f\rho(a)f^{-1}$ pour tout $a \in A$, où $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(M)$ est le morphisme structurel).

Une extension de M en un $(A \rtimes G)$ -module correspond en la donnée d'une scission de la première projection $\tilde{G} \rightarrow G$ (qui est surjective par hypothèse) : l'action de G est alors donnée en composant avec la seconde projection $\tilde{G} \rightarrow \text{End}_k(M)^\times$.

On a un diagramme commutatif dont les lignes et colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & 1 \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \text{End}_A(M)^\times & \longrightarrow & L \longrightarrow 1 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & \hat{G} \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & G & \xlongequal{\quad} & G \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

où $U = 1 + J(\text{End}_A(M))$ est le radical unipotent de $\text{End}_A(M)^\times$ et L un produit de groupes linéaires.

L'extension de G par L est scindée, car G est un tore. Fixons une scission. L'extension correspondante du tore G par le groupe unipotent U est scindée. Par conséquent, l'extension de G par $\text{End}_A(M)^\times$ est scindée, donc M s'étend en un $(A \rtimes G)$ -module.

Passons à l'unicité. Pour M indécomposable, on a $L \simeq \mathbf{G}_m$. La scission de l'extension de G par U est unique à conjugaison par U près, donc la scission de l'extension de G par $\text{End}_A(M)^\times$ est unique à multiplication par un morphisme de G dans $k^\times \cdot 1_M$ près et à conjugaison par U près. \square

Notons au passage que si M est un $(A \rtimes G)$ -module indécomposable, alors M reste indécomposable comme A -module.

5.2. Puissances cycliques de l'espace cotangent.

5.2.1. Soit A une k -algèbre de dimension finie. Soit $T = (JA/J^2A)^*$ l'espace tangent. C'est un $(A/JA, A/JA)$ -bimodule.

Soit \mathcal{S} un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de A -modules simples. On a un isomorphisme canonique de $(A/JA, A/JA)$ -bimodules

$$f_0 : A/JA \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{V \in \mathcal{S}} \text{Hom}_k(V, V)$$

$$a \mapsto \sum_V (v \in V \mapsto av).$$

Soit W un A -module simple. Le morphisme canonique

$$\text{Hom}_A(JA, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(T^*, W)$$

est un isomorphisme. La suite exacte $0 \rightarrow JA \rightarrow A \rightarrow A/JA \rightarrow 0$ fournit un isomorphisme de A -modules

$$\text{Hom}_A(JA, W) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_A^1(A/JA, W).$$

On a un isomorphisme de A -modules induit par f_0

$$\text{Ext}_A^1(A/JA, W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{V \in \mathcal{S}} \text{Ext}_A^1(V, W) \otimes V.$$

Enfin, on a un isomorphisme canonique de A^{en} -modules

$$T^* \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{W \in \mathcal{S}} \text{Hom}_k(\text{Hom}_A(T^*, W), W).$$

Il ne nous reste plus qu'à composer tous ces isomorphismes et à dualiser :

Lemme 5.2. *On a un isomorphisme canonique de A^{en} -modules*

$$T \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{V, W \in \mathcal{S}} \text{Hom}_k(V, W) \otimes \text{Ext}_A^1(W, V).$$

5.2.2. On note $T^{\odot_A^n} = T \otimes_A \cdots \otimes_A T \otimes_A$ le produit tensoriel cyclique n -ème de T au-dessus de A . L'action naturelle de $\text{Aut}(A)$ sur T fournit une action diagonale sur $T^{\odot_A^n}$.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 5.3. *L'action de $\text{Aut}(A)$ sur $T^{\odot_A^n}$ se factorise en une action de $\text{Out}(A)$.*

L'isomorphisme canonique du lemme 5.2 fournit :

Proposition 5.4. *On a un isomorphisme canonique*

$$T^{\odot_A^n} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}} \text{Ext}_A^1(V_1, V_2) \otimes \cdots \otimes \text{Ext}_A^1(V_{n-1}, V_n) \otimes \text{Ext}_A^1(V_n, V_1).$$

5.3. Changement de graduation.

Lemme 5.5. *Tout morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A)$ se relève en un morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$.*

Démonstration. L'image d'un tore maximal T de $\text{Aut}^0(A)$ par le morphisme canonique $\phi : \text{Aut}^0(A) \rightarrow \text{Out}^0(A)$ est un tore maximal de $\text{Out}^0(A)$. Puisque le noyau $\text{Int}(A)$ de ϕ est connexe, la restriction à T de ϕ est scindée. Le lemme découle maintenant du fait que tout morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A)$ est conjugué à un morphisme d'image contenue dans $\phi(T)$. \square

De même, on a

Lemme 5.6. *Tout morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Int}(A)$ se relève en un morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow A^\times$.*

Proposition 5.7. *Deux morphismes $\pi, \pi' : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$ sont conjugués si et seulement si les algèbres graduées (A, π) et (A, π') sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{Aut}(A)$ tel que $\pi' = \alpha\pi\alpha^{-1}$. Alors, l'automorphisme α de A induit un isomorphisme de (A, π) vers (A, π') .

Réciproquement, soit $\alpha \in \text{Aut}(A)$ induisant un isomorphisme de (A, π) vers (A, π') . Alors, $\pi' = \alpha\pi\alpha^{-1}$. \square

Proposition 5.8. *Supposons que l'algèbre A est basique. Soient $\pi, \pi' : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) π et π' induisent des morphismes conjugués $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A)$
- (ii) il existe une famille d'entiers $\{d_i(V)\}$ où V décrit les A -modules simples et $1 \leq i \leq \dim V$ tels que l'algèbre graduée (A, π') est isomorphe à $\text{Endgr}_{(A, \pi)}(\bigoplus_{V, i} P_V \langle d_i(V) \rangle)$.

Démonstration. Soit S une sous-algèbre semi-simple maximale de A , S' une sous-algèbre de Cartan de S (un produit maximal de corps dont chacune des unités est un idempotent primitif de S) et $T' = S'^\times$ (c'est un tore maximal de S^\times). Alors, T' est un tore maximal de A^\times . Soit T'' son image dans $\text{Int}(A)$. Soit T un tore maximal de $\text{Aut}(A)$ contenant T'' .

Quitte à conjuguer π et π' par des éléments de $\text{Aut}(A)$, ce qui ne change pas la classe d'isomorphisme des algèbres graduées (proposition 5.7), on peut supposer que π et π' sont à valeur dans T . Supposons que π et π' deviennent conjugués dans $\text{Out}(A)$. On peut supposer, quitte à conjuguer π , que π et π' coïncident dans $\text{Out}(A)$ et alors, $\pi'\pi^{-1}$ est un cocaractère ψ de T'' , que l'on peut relever en $\phi : \mathbf{G}_m \rightarrow T'$.

On a $S = \prod_V e_V S$ où V décrit l'ensemble des classes d'isomorphisme de A -modules simples et e_V est l'idempotent primitif du centre de S qui n'agit pas par 0 sur V . Décomposons e_V en sommes d'idempotents primitifs de S' , $e_{V,1}, \dots, e_{V,n_V}$ deux à deux orthogonaux, $e_V = \sum_i^\perp e_{V,i}$. Il existe des entiers $d_i(V)$ tels que $\phi(\alpha) = \sum_{V,i} \alpha^{d_i(V)} e_{V,i}$ pour tout $\alpha \in k^\times$.

Considérons maintenant le cocaractère $\psi : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Int}(A), \alpha \mapsto (a \mapsto \phi(\alpha)a\phi(\alpha)^{-1})$. Alors, \mathbf{G}_m agit (via ψ) avec le poids $d_i(V) - d_j(W)$ sur $e_{V,i}Ae_{W,j}$.

Par conséquent, l'algèbre graduée $(A, \psi\pi)$ est égale à l'algèbre graduée $\bigoplus_{V,W,i,j} e_{V,i}Ae_{W,j} \langle d_j(W) - d_i(V) \rangle \xrightarrow{\sim} \text{Endgr}_{(A,\pi)}(\bigoplus_{V,i} Ae_{V,i} \langle d_i(V) \rangle)$. La réciproque est claire. \square

Ainsi, la donnée d'un morphisme non trivial $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A)$ détermine une graduation “à équivalence de Morita près” :

Corollaire 5.9. *Supposons A basique. Deux graduations sur A donnent lieu à des algèbres graduées Morita-équivalentes si et seulement si les cocaractères correspondant de $\text{Out}(A)$ sont conjugués.*

Remarque 5.10. Lorsque l'algèbre A n'est pas basique, les résultats précédents restent vrais en remplaçant la conjugaison par $\text{Out}(A)$ par la conjugaison par $\text{Pic}(A)$.

Notons que l'ensemble des classes de “Morita-équivalence” de graduations n'est pas invariant par équivalence dérivée. Soit A une k -algèbre de dimension finie munie d'une graduation qui n'est pas Morita-équivalente à la graduation triviale. Soit A' une algèbre dérivée-équivalente à A , mais non Morita-équivalente. On munit A' d'une graduation compatible à l'équivalence. On peut munir $A \times A'$ de deux graduations non Morita-équivalentes : la première est la graduation non triviale sur A et la graduation triviale sur A' , la seconde est la graduation triviale sur A et la graduation non triviale sur A' .

L'algèbre $A \times A'$ est dérivée-équivalente à $A \times A$ et les deux graduations précédentes sont compatibles respectivement avec les deux graduations suivantes sur $A \times A$: la première est la graduation non triviale sur le premier facteur A et la graduation triviale sur le second facteur A , la seconde est la graduation triviale sur le premier facteur A et la graduation non triviale sur le second facteur A . Ces deux graduations sur $A \times A$ sont Morita-équivalentes.

5.4. Graduons et positivité.

5.4.1. Soit A une k -algèbre finie graduée. Le lemme suivant est immédiat (on reprend les notations de §5.1.1)

Lemme 5.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

- la graduation est en degrés positifs ;
- le morphisme π s'étend en un morphisme de variétés $\mathbf{A}^1 \rightarrow \text{End}(A)$ (où \mathbf{G}_m est vu comme l'ouvert $\mathbf{A}^1 - \{0\}$) ;
- le morphisme ρ provient d'un morphisme d'algèbres $A \rightarrow A[t]$.

Remarque 5.12. Lorsque A est basique (i.e., les A -modules simples sont de dimension 1), alors A/JA est un produit de corps, donc est en degré 0. Notons que si A n'est pas basique, il

se peut que A/JA ne soit pas en degré 0. En changeant la graduation sans changer le morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A)$, on peut se ramener au cas où A/JA est en degré 0.

Lorsque A est semi-simple et en degrés positifs, alors $A = A_0$.

Lemme 5.13. *L'algèbre A est en degrés positifs si et seulement si A/J^2A est en degrés positifs.*

Démonstration. Supposons A/J^2A en degrés positifs. Soit S une sous-algèbre de A_0 qui s'envoie bijectivement sur A/JA . Une famille d'éléments de JA qui engendrent JA/J^2A comme k -espace vectoriel engendrent A comme S -algèbre, d'où le résultat. \square

5.4.2.

Proposition 5.14. *Soit $\bar{\pi} : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *il existe un relèvement de $\bar{\pi}$ en un morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$ qui s'étend en un morphisme $\mathbf{A}^1 \rightarrow \text{End}(A)$;*
- (ii) *pour tout entier positif n , le groupe \mathbf{G}_m agit (via $\bar{\pi}$) avec des poids positifs sur $(JA/J^2A)^{\otimes n}$;*
- (iii) *pour toute graduation associée à un morphisme $\pi : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$ relevant $\bar{\pi}$, pour toute suite $S_n = S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ de A -modules simples de degré 0 et pour tous $d_0, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{Ext}^1(S_i, S_{i+1}\langle -d_i \rangle) \neq 0$, alors $\sum_i d_i \geq 0$;*
- (iv) *le morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Out}(A/J^2A)$ déduit de $\bar{\pi}$ par le morphisme canonique se relève en un morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A/J^2A)$ qui s'étend en un morphisme $\mathbf{A}^1 \rightarrow \text{End}(A/J^2A)$.*

Démonstration. L'équivalence entre (ii) et (iii) résulte de la proposition 5.4. Notons que (i) implique bien sûr (ii) et (iv).

Soit $f : \text{Out}(A) \rightarrow \text{Out}(A/J^2A)$ le morphisme canonique. Le morphisme canonique $\text{Int}(A) \rightarrow \text{Int}(A/J^2A)$ est surjectif et sa restriction à un tore maximal est un isomorphisme, donc tout relèvement de $f\bar{\pi}$ en un morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A/J^2A)$ provient d'un morphisme $\pi : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$ relevant $\bar{\pi}$. Les lemmes 5.11 et 5.13 montrent alors que (iv) \implies (i).

Supposons (iii). Choisissons un relèvement de $\bar{\pi}$ en un morphisme $\pi : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$ tel que A/JA est en degré 0.

Soient S et T deux A -modules simples de degré 0. Soit $f(S, T)$ le plus petit entier d tel qu'il existe des A -modules simples S_1, \dots, S_n de degré 0 et des entiers d_0, \dots, d_n vérifiant

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(S, S_1\langle -d_0 \rangle) \neq 0, \text{Ext}^1(S_1, S_2\langle -d_1 \rangle) \neq 0, \dots, \\ \text{Ext}^1(S_{n-1}, S_n\langle -d_{n-1} \rangle) \neq 0, \text{Ext}^1(S_n, T\langle -d_n \rangle) \neq 0 \\ \text{et } \sum d_i = d. \end{aligned}$$

On a $f(S, T) + f(T, U) \geq f(S, U)$ et $f(S, T) + f(T, S) \geq 0$ pour tous S, T et U simples de degré 0. Par conséquent, il existe une application d de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A -modules simples de degré 0 vers les entiers telle que la fonction $f'(S, T) = f(S, T) + d(S) - d(T)$ ne prend que des valeurs positives (cf lemme 5.15 ci-dessous). En remplaçant A par l'algèbre graduée $\text{Endgr}_{(A, \pi)}(\bigoplus_S P_S^{\dim S} \langle d(S) \rangle)$, on a $\text{Ext}^1(S, T\langle d \rangle) = 0$ pour $d > 0$ pour tous modules simples S et T de degré 0. Puisque on a un isomorphisme de (A, A) -bimodules gradués (lemme 5.2)

$$JA/J^2A \simeq \bigoplus_{S, T, d} (T \otimes S^*)^{\dim \text{Ext}^1(S, T\langle d \rangle)} \langle d \rangle,$$

on en déduit que JA/J^2A est en degrés positifs, donc A aussi, par le lemme 5.13. On a donc démontré (iii) \implies (i). \square

Lemme 5.15. *Soit E un ensemble fini et $f : E \times E \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que $f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z)$ et $f(x, y) + f(y, x) \geq 0$ pour tous $x, y, z \in E$. Alors, il existe $d : E \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que $f' : E \times E \rightarrow \mathbf{Z}$ donnée par $f'(x, y) = f(x, y) + d(x) - d(y)$ ne prend que des valeurs positives.*

Démonstration. On prouve le lemme par récurrence sur la valeur absolue de la somme des valeurs négatives de f . Soit E_- l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe $y \in E$ avec $f(x, y) < 0$. Supposons $E_- \neq \emptyset$. Soit $c : E \rightarrow \mathbf{Z}$ donnée par $c(x) = 1$ si $x \in E_-$ et $c(x) = 0$ sinon. On considère la fonction g donnée par $g(x, y) = f(x, y) + c(x) - c(y)$. Si $x \in E_-$, alors $g(x, y) = f(x, y)$ ou $g(x, y) = f(x, y) + 1$. Soient $x \notin E_-$ et $y \in E$ tels que $f(x, y) = 0$. Alors, tout z , on a $f(x, z) \leq f(y, z)$. Par conséquent, $y \notin E_-$. On en déduit que $g(x, y) = f(x, y)$. On a montré que la somme des valeurs absolues des valeurs négatives de g est strictement inférieure à la somme correspondante pour f . Puisque g vérifie encore les hypothèses du lemme, on conclut par récurrence. \square

Remarque 5.16. Dans la proposition, on peut bien sûr supposer que n est au plus le nombre de A -modules simples.

Remarque 5.17. La positivité de l'homologie cyclique ou de l'homologie de Hochschild de A ne suffit pas pour avoir une graduation positive.

5.5. Dualité.

5.5.1. Soit A une algèbre de Frobenius, *i.e.*, on se donne ν un automorphisme de A et $A^* \xrightarrow{\sim} A_\nu$ un isomorphisme de (A, A) -bimodules. On suppose A graduée et indécomposable. On notera $n = n_A = \sup\{i | A_i \neq 0\} - \inf\{i | A_i \neq 0\}$.

Proposition 5.18. *On a des isomorphismes de (A, A) -bimodules gradués $A^* \simeq A_\nu\langle n \rangle$. Plus généralement, $(\text{soc}^i A)^* \simeq (A/J^i A) \otimes_A A_\nu\langle n \rangle$ pour tout $i \geq 0$.*

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement du lemme 5.1, puisque A_ν et A^* sont indécomposables et isomorphes comme (A, A) -bimodules non gradués.

L'isomorphisme canonique $(\text{soc}^i A)^* \xrightarrow{\sim} (A^*/J^i A^*)$, permet de déduire la deuxième assertion. \square

Un isomorphisme $f : A_\nu\langle n \rangle \xrightarrow{\sim} A^*$ provient d'une forme linéaire $t : A\langle n \rangle \rightarrow k$: on a

$$f = \hat{t} : A_\nu\langle n \rangle \xrightarrow{\sim} A^*, \quad a \mapsto (a' \mapsto t(a'a)).$$

Rappelons que l'algèbre A (munie de f ou, de manière équivalente, de t) est symétrique si $\nu = \text{id}$.

Fixons une telle forme. Pour tout A -module gradué V , on dispose alors d'isomorphismes de A° -modules gradués (le premier est une adjonction, le second fournit par f) :

$$V^* \xrightarrow{\sim} \text{Homgr}_A(V, A^*) \xrightarrow{\sim} \text{Homgr}_A(V, A_\nu)\langle n \rangle.$$

Soit X un A -module gradué et P un A -module projectif indécomposable gradué. On a un accouplement parfait

$$\text{Hom}(P, X) \otimes_k \text{Hom}(X, P_\nu\langle n \rangle) \rightarrow k.$$

5.5.2. Supposons maintenant A non-nécessairement de Frobenius, mais auto-injective. Soit A' une algèbre basique Morita-équivalente à A : c'est encore une algèbre auto-injective, donc elle est de Frobenius.

On dispose d'un automorphisme ν de l'ensemble des classes d'isomorphisme de A -modules simples (=ensemble des classes d'isomorphisme de A' -modules simples), l'automorphisme de Nakayama, et d'un accouplement parfait

$$\mathrm{Hom}(P_V, X) \otimes_k \mathrm{Hom}(X, P_{\nu(V)}\langle n \rangle) \rightarrow k$$

pour tout A -module simple V .

5.6. **Matrices de Cartan.** On suppose ici A auto-injective et indécomposable. Soit \mathcal{S} l'ensemble des classes d'isomorphisme de A -modules simples de degré 0 et r son cardinal. La matrice de Cartan graduée C de A est la $(\mathcal{S} \times \mathcal{S})$ -matrice sur $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ dont le coefficient $C(V, W)$ est

$$C(V, W) = \sum_i q^i \dim \mathrm{Hom}(P_V, P_W\langle i \rangle).$$

On notera $x \mapsto \bar{x}$ l'automorphisme de $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ qui échange q et q^{-1} .

Proposition 5.19. *On a $C(V, W) = q^n \overline{C(W, \nu(V))}$.*

Si $A_{<0} = 0$, alors

$$\det C = c + a_1 q + \dots + a_{nr-1} q^{nr-1} + \varepsilon(\nu) c q^{nr}$$

où a_1, \dots, a_{nr-1} sont des entiers, c est le déterminant de la matrice de Cartan de A_0 et $\varepsilon(\nu)$ est le signe de la permutation ν de \mathcal{S} .

Démonstration. La première égalité résulte de l'isomorphisme du §5.5.2 :

$$\mathrm{Hom}(P_V, P_W\langle i \rangle)^* \simeq \mathrm{Hom}(P_W, P_{\nu(V)}\langle n - i \rangle).$$

Lorsque $A_{<0} = 0$, la matrice de Cartan est à coefficients dans $\mathbf{Z}[q]$ et il est clair que sa partie constante est la matrice de Cartan de A_0 . Le degré de $\det C$ est au plus nr et le coefficient de q^{nr} dans $\det C$ est le terme constant de $q^{nr} \det \bar{C} = \varepsilon(\nu) \det C$. \square

5.7. **Degré 0.** Lorsque A/JA est concentrée en degré 0 (c'est le cas si A est basique car alors $A/J(A)$ est un produit de copies de k), alors les A_0 -modules simples sont les restrictions des A -modules simples et $A_{<0} \oplus A_{>0} \subseteq J(A)$.

On prend dans le reste de cette partie §5.7 pour A une algèbre graduée telle que $A_{<0} = 0$. On a alors $A_0 \xrightarrow{\sim} A/A_{>0}$.

On a un foncteur exact pleinement fidèle de $A/A_{>0} \otimes_{A_0} - : A_0\text{-mod} \rightarrow A\text{-modgr}$ d'image la sous-catégorie de Serre des A -modules gradués concentrés en degré 0. C'est un foncteur exact, d'inverse à gauche le foncteur exact "poids 0". Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(A/A_{>0}, -)$ est adjoint à droite de $A/A_{>0} \otimes_{A_0} -$ et est aussi un inverse à gauche.

En dérivant, on obtient

Proposition 5.20. *Le foncteur $A/A_{>0} \otimes_{A_0}^{\mathbf{L}} - : D(A_0\text{-Mod}) \rightarrow D(A\text{-Modgr})$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. En effet, le foncteur $R\mathrm{Hom}_{A\text{-Modgr}}^\bullet(A/A_{>0}, -)$ est adjoint à droite. C'est aussi un inverse à gauche car $\mathrm{Ext}_A^i(A/A_{>0}, M) = 0$ pour $i > 0$ et M un A -module tel que $M_0 = M$. On en déduit que $A/A_{>0} \otimes_{A_0}^{\mathbf{L}} -$ est pleinement fidèle. \square

Proposition 5.21. *On a l'équivalence des assertions suivantes :*

(i) *L'algèbre A_0 est de dimension globale finie.*

(ii) Le A -module A_0 engendre $D^b(A\text{-modgr})$ comme sous-catégorie épaisse close par décalage $\langle - \rangle$.

(iii) Pour tous V, W dans $D^b(A\text{-modgr})$, on a $\text{Hom}_A(V, W[i]) = 0$ pour $i \gg 0$.

Si en outre A est auto-injective, ces assertions sont équivalentes à

(iv) Pour V et W dans $A\text{-stabgr}$, on a $\text{Ext}_A^i(V, W) = 0$ pour $i \gg 0$.

Plus précisément, la dimension globale de A_0 est le plus petit entier d tel que pour tous A -modules V et W , on a $\text{Ext}_A^i(V, W) = 0$ pour $i \geq (d+1)(1+b-a)$, où a (resp. b) est le plus petit (resp. grand) entier tel que $V_a \neq 0$ (resp. $W_b \neq 0$).

Démonstration. L'équivalence de (iii) et (iv) est claire.

(i) est équivalent à la propriété que les A_0 -modules simples sont quasi-isomorphes à des complexes bornés de A_0 -module projectifs. Par conséquent, (i) implique (ii).

Supposons maintenant (ii). Soit V un A_0 -module. Alors, V est extension itérée de complexes $P[i]\langle j \rangle$ où P est un A_0 -module projectif. Après application du foncteur “poids 0”, on obtient V comme extension itérée de complexes $P[i]$. Puisque $\text{Ext}_A^i(A_0, A_0) = \text{Ext}_{A_0}^i(A_0, A_0) = 0$ pour $i \neq 0$, on en déduit que V est quasi-isomorphe à un complexe borné de A_0 -modules projectifs. On a ainsi montré (i).

Supposons $\text{Ext}_A^i(V, W) = 0$ pour $i \geq n$ et pour tous A_0 -modules simples V et W . Alors, A_0 est de dimension globale inférieure à n , puisque $\text{Ext}_{A_0}^i(V, W) = \text{Ext}_A^i(V, W)$. En particulier, (iii) implique (i).

Supposons A_0 de dimension globale d . Nous allons montrer que pour tout A_0 -module V , le module $\Omega_A^{d+1}V$ est engendré en degrés ≥ 1 .

Le A -module V est quasi-isomorphe à un complexe borné C de A_0 -modules projectifs avec $C^i = 0$ pour $i < -d$ et $i > 0$. Chaque A -module C^i admet une résolution projective dont tous les termes, sauf le premier, sont engendrés en degrés ≥ 1 . On en déduit que V a une résolution projective où tous les termes sont engendrés en degrés ≥ 1 , sauf les $d+1$ premiers. Par conséquent, $\Omega_A^{d+1}V$ est engendré en degrés ≥ 1 .

On en déduit que si S et T sont deux A_0 -modules simples, alors $\text{Ext}_A^i(S, T\langle n \rangle) = 0$ pour $i \geq (d+1)(1-n)$. On obtient alors que (i) implique (iii) et on déduit aussi la dernière partie de la proposition. \square

6. EQUIVALENCE STABLES GRADUÉES

6.1. Invariances.

6.1.1. *Graduation.* Soit A une k -algèbre auto-injective graduée. Soit B une k -algèbre auto-injective.

Théorème 6.1. Soient L un (A, B) -bimodule et L' un (B, A) -bimodule induisant des équivalences stables (non graduées) inverses entre A et B (cf §4.3.6).

Alors, il existe une graduation sur B et des structures de bimodules gradués sur L et L' . En particulier, L et L' induisent des équivalences inverses entre les catégories $B\text{-stabgr}$ et $A\text{-stabgr}$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où L et L' sont indécomposables, quitte à remplacer A et B par des blocs.

Soit $\sigma : \mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(A)$ induisant la graduation sur A . Soit τ un morphisme $\mathbf{G}_m \rightarrow \text{Aut}(B)$ dont l'image dans $\text{Hom}(\mathbf{G}_m, \text{Out}^0(B))$ correspond à celle de σ dans $\text{Hom}(\mathbf{G}_m, \text{Out}^0(A))$ via l'isomorphisme $\text{Out}^0(A) \xrightarrow{\sim} \text{Out}^0(B)$ induit par L (théorème 4.15). Cela munit B d'une structure graduée.

Pour $x \in k^\times$, on a $(A_{\sigma(x)}) \otimes_A L \otimes_B B_{\tau(x)} \simeq L$. Par conséquent, le $(A \otimes B^\circ)$ -module L est graduable (proposition 5.1). Ainsi, on a obtenu une structure d'algèbre graduée sur B et une structure graduée sur le (A, B) -bimodule L . On procède de même pour L' . \square

Remarque 6.2. Rappelons la construction en terme de bimodules. Soit $X = A[t, t^{-1}]$, vu comme $A^{\text{en}}[t, t^{-1}]$ -module par multiplication de $A[t, t^{-1}]$ à gauche et où l'action de $a \in A_i$ à droite est la multiplication par $t^i a$. Soit $Y = L' \otimes_A X \otimes_A L$. C'est un $B^{\text{en}}[t, t^{-1}]$ -module. La preuve du lemme 4.14 montre l'existence de $B^{\text{en}}[t, t^{-1}]$ -modules Z et P tels que Z est localement libre de rang 1 comme $B[t, t^{-1}]$ -module et comme $B^\circ[t, t^{-1}]$ -module et P est localement projectif comme $B^{\text{en}}[t, t^{-1}]$ -module, avec $Y = P \oplus Z$. Alors, Z est isomorphe au $B^{\text{en}}[t, t^{-1}]$ -module associé à τ .

On démontre de la même manière, en utilisant le théorème 4.6, le résultat suivant :

Théorème 6.3. *Soient A et B deux k -algèbres de dimension finie. On suppose A munie d'une graduation. Soient $L \in D^b(A \otimes B^\circ)$ et $L' \in D^b(B \otimes A^\circ)$ induisant des équivalences dérivées (non graduées) inverses entre A et B (cf §4.2.2).*

Alors, il existe une graduation sur B et des structures de complexes de bimodules gradués sur L et L' . En particulier, L et L' induisent des équivalences inverses entre les catégories $D^b(B\text{-modgr})$ et $D^b(A\text{-modgr})$.

6.1.2. *Longueur.* Soient A et B deux k -algèbres auto-injectives graduées indécomposables et non simples. Soit $L \in (A \otimes B^\circ)\text{-modgr}$ induisant une équivalence stable.

Les longueurs des graduations (cf §5.5) des deux algèbres coïncident :

Lemme 6.4. *On a $n_A = n_B$.*

Démonstration. Les bimodules gradués $\text{Homgr}_A(L, A)$ et $\text{Homgr}_B(L, B)$ sont isomorphes dans $(B \otimes A^\circ)\text{-stabgr}$ (unicité à isomorphisme près d'un adjoint de $L \otimes_B -$). Ces derniers sont respectivement isomorphes à $L^*\langle -n_A \rangle$ et $L^*\langle -n_B \rangle$ (lemme 5.18). \square

Lemme 6.5. *On a $\det C_A \in \pm q^{\mathbf{Z}} \cdot \det C_B$.*

Démonstration. Cela résulte de la commutativité du diagramme de groupes de Grothendieck (en fait de $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ -modules)

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(A\text{-projgr}) & \xrightarrow{C_A} & K_0(A\text{-modgr}) & \longrightarrow & \text{coker } C_A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \\ K_0(B\text{-projgr}) & \xrightarrow{C_B} & K_0(B\text{-modgr}) & \longrightarrow & \text{coker } C_B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par $L \otimes_A -$. \square

6.1.3. *Nombre de modules simples.* Nous en arrivons maintenant au point crucial de cette étude numérique, qui montre la pertinence de la prise en compte des graduations.

Si A_0 est de dimension globale finie, alors B_0 est aussi de dimension globale finie (proposition 5.21).

La proposition suivante fournit une réponse positive à la conjecture d'Alperin-Auslander dans le cadre d'algèbres positivement graduées.

Proposition 6.6. *Soient A et B deux k -algèbres auto-injectives graduées indécomposables. On suppose qu'il existe une équivalence stable entre ces algèbres induite par un bimodule gradué.*

Si A_0 est de dimension globale finie et si A et B sont concentrées en degrés positifs, alors A et B ont le même nombre de modules simples.

Démonstration. On sait que $n_A = n_B$ d'après le lemme 6.4. Puisque A_0 et B_0 sont de dimension globale finie, leurs matrices de Cartan sont inversibles sur \mathbf{Z} .

D'après le lemme 6.5 et en utilisant la description du déterminant de la matrice de Cartan graduée donnée par la proposition 5.19, on obtient $r_A n_A = r_B n_B$. Enfin, $n_B \neq 0$, car $B \neq B_0$ puisque B_0 est de dimension globale finie (une algèbre symétrique de dimension globale finie est semi-simple). \square

Remarque 6.7. Le problème de la positivité d'une algèbre stablement équivalente à une algèbre positivement graduée est délicat. Il existe une graduation sur l'algèbre $\mathbf{F}_2\mathcal{A}_4$ et une équivalence stable (et même dérivée) avec le bloc principal A de $\mathbf{F}_2\mathcal{A}_5$ telles qu'il n'existe pas de graduation positive sur A compatible avec l'équivalence.

Etant donnée une algèbre auto-injective A graduée en degrés positifs, dans quels cas peut-on reconstruire A à partir de A_0 ? Il serait aussi intéressant d'étudier le cas où l'algèbre différentielle graduée $R\text{End}_A^\bullet(A/A_{>0}, A/A_{>0})$ est formelle.

6.1.4. Relèvements d'équivalences stables.

Définition 6.8. *Soit A une k -algèbre symétrique indécomposable. On dit que A admet des relèvements d'équivalences stables si toute équivalence stable de type de Morita entre A et une algèbre symétrique indécomposable B se relève en une équivalence dérivée.*

Remarque 6.9. Notons qu'on peut aussi demander la propriété plus faible suivante : si B est une k -algèbre symétrique et s'il existe une équivalence stable de type de Morita entre A et B , alors il existe une équivalence dérivée entre A et B .

Notons enfin que la généralisation directe au cas de corps non algébriquement clos n'est pas raisonnable : deux extensions galoisiennes non-isomorphes du corps sont stablement équivalentes mais non dérivé-équivalentes.

6.2. Algèbres de groupes et graduations.

6.2.1. Blocs locaux.

. Soit k un corps de caractéristique p .

Soit P un p -groupe abélien. L'algèbre kP est isomorphe à l'algèbre graduée associée à la filtration par le radical de kP : $\bigoplus_i J^i kP / J^{i+1} kP$.

On obtient un isomorphisme en choisissant des générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de P d'ordres d_1, \dots, d_n tels que $P = \prod_i \langle \sigma_i \rangle$. Alors,

$$kP \xrightarrow{\sim} k[x_1, \dots, x_r] / (x_i^{d_i}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i J^i kP / J^{i+1} kP$$

$$\sigma_i - 1 \mapsto x_i \mapsto \overline{\sigma_i - 1}$$

où $\overline{\sigma_i - 1}$ est l'image de $\sigma_i - 1 \in JkP$ dans $\bigoplus_i J^i kP / J^{i+1} kP$.

Soit E un p' -sous-groupe d'automorphismes de P , \hat{E} une extension centrale de E par k^\times et $A = k_* P \rtimes \hat{E}$ l'algèbre de groupe de $P \rtimes E$ tordue par l'extension centrale. Alors, A est isomorphe à $\bigoplus_i J^i A / J^{i+1} A$.

Un tel isomorphisme fournit une graduation sur A . On a $A_0 = k_* \hat{E}$.

. Reprenons la construction plus explicitement.

Soit P un p -groupe abélien homocyclique d'exposant p^r .

Choisissons un sous-espace V de $J(kP)$ tel que $J(kP) = V \oplus J(kP)^2$. Alors, kP est engendrée, comme k -algèbre, par 1 et V . Le noyau du morphisme canonique $S(V) \rightarrow kP$ est V^{p^r} . On définit donc une graduation de kP en prenant $k \cdot 1$ en degré 0 et V en degré 1.

. Soit E un p' -groupe agissant sur P . On a une suite exacte scindée de kE -modules

$$0 \rightarrow J(kP)^2 \rightarrow J(kP) \rightarrow J(kP)/J(kP)^2 \rightarrow 0.$$

Soit V un sous- kE -module de $J(kP)$ tel que $J(kP) = V \oplus J(kP)^2$. Alors, on munit kP de la graduation où V est en degré 1 et $k \cdot 1$ en degré 0 : c'est une graduation E -invariante.

Donnons-nous en outre une k^\times -extension centrale \hat{E} de E . Considérons maintenant $A = k_*(P \rtimes \hat{E})$. Alors, on munit A de la graduation telle que $k_*\hat{E}$ est en degré 0 et V en degré 1.

. Prenons maintenant P un p -groupe abélien quelconque et E un p' -groupe agissant sur P . Puisque les $\mathbf{Z}_p E$ -modules indécomposables de torsion sont homocycliques, il existe une décomposition E -stable $P = \prod_i P_i$, où P_i est homocyclique d'exposant p^i .

Pour chaque i , on fixe V_i un sous- kE -module de $J(kP_i)$ tel que $J(kP_i) = V_i \oplus J(kP_i)^2$. Soit $V = \oplus_i V_i$. On munit alors kP de la graduation où V est en degré 1. Comme plus haut, étant donnée une k^\times -extension centrale \hat{E} de E , on munit $k_*(P \rtimes \hat{E})$ de la graduation telle que $k_*\hat{E}$ est en degré 0 et V en degré 1.

6.2.2. Application. Soit G un groupe fini, k un corps algébriquement clos de caractéristique p , A un bloc de kG de défaut D . Soit B le bloc correspondant de $N_G(D)$. D'après [Kü], l'algèbre B est Morita-équivalente à une algèbre de groupe tordue $k_*D \rtimes \hat{E}$, où $E = N_G(D, b_D)/C_G(D)$, \hat{E} est une extension centrale de E par k^\times et (D, b_D) est une A -sous-paire maximale.

Théorème 6.10. *Si D est cyclique, abélien élémentaire de rang 2 ou si D est abélien d'ordre 8, alors il existe une graduation sur A et une équivalence stable graduée entre A et B .*

Démonstration. D'après [Rou1, Theorem 6.3 et Theorem 6.10] et [Rou5] (blocs non principaux), il existe une équivalence stable de type de Morita entre A et B . Le théorème résulte alors du théorème 6.1. \square

Le cas des blocs à défaut cyclique a été étudié en détail par D. Bogdanic [Bog].

La conjecture de Broué [Bro] sur les blocs à défaut abélien prédit que les conclusions du théorème 6.10 sont vraies si D est abélien (la conjecture prédit plus précisément que les blocs seront dérivé-équivalents). Si cette conjecture est vraie, alors tous les blocs à défaut abélien ont une graduation non triviale.

Remarque 6.11. Puisque la conjecture de Broué est prouvée pour les groupes symétriques [ChRou], on obtient des graduations sur les blocs à défaut abélien des groupes symétriques. En transférant la graduation canonique sur les “bons blocs”, on obtient des graduations dont il est naturel de conjecturer que les matrices de Cartan graduées associées sont décrites par des polynômes de Kazhdan-Lusztig paraboliques. Le transfert des graduations provient d'opérateurs du type “tresses élémentaires”. En fait, [Rou4] montre que ces graduations sont compatibles aux foncteurs induction et restriction appropriés. La somme des catégories de représentations de groupes symétriques sur k fournit une 2-représentation “simple” de $\hat{\mathfrak{sl}}_p$ qui se retrouve automatiquement munie de graduations. Celles-ci se décrivent de manière explicite via un isomorphisme avec des algèbres cyclotomiques de Hecke de carquois [BruKl, Rou4].

Question 6.12. On suppose D abélien. Existe-t'il une graduation en degrés positifs sur A , compatible avec une équivalence dérivée avec B , muni de sa graduation canonique? Peut-on trouver une telle graduation telle que $R\text{End}_A^\bullet(A/A_{>0}, A/A_{>0})$ est une algèbre différentielle graduée formelle?

L'existence de graduations positives est connue si D est cyclique [Bog]. Elle est vraie aussi si $D \simeq (\mathbf{Z}/2)^2$.

Question 6.13. Soit P un p -groupe abélien, E un sous-groupe d'ordre premier à p du groupe d'automorphismes de P et considérons une extension centrale \hat{E} de E par k^\times . Est-ce que $k_*P \rtimes E$ satisfait les relèvements d'équivalences stables?

Une réponse affirmative à une forme plus précise de la question 6.13 a pour conséquence une réponse affirmative à la conjecture de Broué [Rou1, Rou5].

6.3. Extensions triviales d'algèbres.

6.3.1. Soit B une k -algèbre de dimension finie. On définit l'algèbre $T(B) = B \oplus B^*$ avec le produit

$$(a, f) \cdot (b, g) = (ab, ag + fb)$$

où on a utilisé la structure de (B, B) -bimodule de B^* .

L'algèbre $T(B)$ est graduée, avec B en degré 0 et B^* en degré 1. On a une forme linéaire canonique sur $T(B)$:

$$t : T(B) \rightarrow k\langle -1 \rangle, \quad (a, f) \mapsto f(1)$$

qui induit une structure d'algèbre symétrique sur $T(B)$.

Une algèbre graduée extension triviale se reconnaît aisément :

Proposition 6.14. Soit A une k -algèbre symétrique graduée en degrés 0 et 1 munie d'une forme symétrisante $t : A \rightarrow k\langle -1 \rangle$. Alors,

$$\phi = (\text{id}, \hat{t}|_{A_1}) : A = A_0 \oplus A_1 \rightarrow T(A_0) = A_0 \oplus A_0^*$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Démonstration. Soit $a \in A_0$ et $b \in A_1$. Alors, $\phi(ba) = (1, \hat{t}(ba)) = (1, \hat{t}(b)a) = (1, \hat{t}(b))(a, 1) = \phi(b)\phi(a)$ et $\phi(ab) = (1, \hat{t}(ab)) = (1, a\hat{t}(b)) = \phi(a)\phi(b)$. \square

6.3.2. Le théorème suivant étend la proposition 5.20. Il est dû à Happel [Ha, Theorem 10.10] lorsque $A = T(A_0)$ et A_0 est de dimension globale finie.

Théorème 6.15. Soit A une k -algèbre graduée auto-injective avec $A_{<0} = 0$. Si $\text{soc } A \subset A_{>0}$, alors le foncteur composé

$$D^b(A_0\text{-mod}) \xrightarrow{A/A_{>0} \otimes_{A_0}^L -} D^b(A\text{-modgr}) \xrightarrow{\text{can}} A\text{-stabgr}$$

est pleinement fidèle.

Si en outre $A = A_0 \oplus A_1$ et A_0 est de dimension globale finie, alors le foncteur $D^b(A_0\text{-mod}) \rightarrow A\text{-stabgr}$ est une équivalence.

Démonstration. Notons que A n'a pas de module simple projectif, puisque $\text{soc } A \subset A_{>0}$. Soient M et N deux A_0 -modules simples. Soit $d > 0$. Alors, $\text{soc } \Omega^d N$ est en degrés > 0 . Par conséquent, $\text{Hom}_{A\text{-modgr}}(M, \Omega^d N) = 0$.

On a $\text{Hom}_{D^b(A\text{-modgr})}(M, N[d]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A\text{-stabgr}}(M, \Omega^{-d} N)$. Cet isomorphisme reste vrai pour $d = 0$ car A n'a pas de module simple projectif. On en déduit que $\text{Hom}_{D^b(A_0\text{-mod})}(M, N[d]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A\text{-stabgr}}(M, \Omega^{-d} N)$ pour tout d . Puisque les modules simples engendrent $D^b(A_0\text{-mod})$ comme catégorie triangulée, la première partie du théorème est établie.

Supposons maintenant $A = A_0 \oplus A_1$ et A_0 est de dimension globale finie. Alors, A_1 est un cogénérateur injectif. Soit \mathcal{T} la sous-catégorie épaisse de $D^b(A\text{-modgr})$ engendrée par A_0 et par les $A\langle i \rangle$ pour $i \in \mathbf{Z}$. On a $A_1\langle -1 \rangle \simeq \Omega(A_0) \in \mathcal{T}$, donc $M\langle -1 \rangle \in \mathcal{T}$ pour tout $M \in A_0\text{-mod}$. Par récurrence, on en déduit que $M\langle -i \rangle \in \mathcal{T}$ pour tout $i \geq 0$ et tout $M \in A_0\text{-mod}$.

On a $A_1 \in \mathcal{T}$, donc $A_0\langle 1 \rangle \simeq \Omega^{-1}(A_1) \in \mathcal{T}$. Par conséquent, $M\langle 1 \rangle \in \mathcal{T}$ pour tout $M \in A_0\text{-mod}$ et par récurrence, on déduit que $M\langle i \rangle \in \mathcal{T}$ pour tout $i \geq 0$ et tout $M \in A_0\text{-mod}$.

Finalement, $\mathcal{T} = D^b(A\text{-modgr})$, donc $A\text{-stabgr}$ est engendrée par A_0 . Ceci montre que le foncteur $D^b(A_0\text{-mod}) \rightarrow A\text{-stabgr}$ est une équivalence. \square

Rappelons le résultat suivant de Rickard [Ri, Theorem 3.1] :

Théorème 6.16. *Soient A_0 et B_0 deux k -algèbres de dimension finie et $F : D^b(A_0\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} D^b(B_0\text{-mod})$ une équivalence de catégories triangulées. Alors il existe une équivalence de catégories triangulées graduées $G : D^b(T(A_0)\text{-modgr}) \xrightarrow{\sim} D^b(T(B_0)\text{-modgr})$ rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} D^b(A_0\text{-mod}) & \xrightarrow[\sim]{F} & D^b(B_0\text{-mod}) \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \text{can} \\ D^b(T(A_0)\text{-modgr}) & \xrightarrow[\sim]{G} & D^b(T(B_0)\text{-modgr}) \end{array}$$

Corollaire 6.17. *Soient A_0 une k -algèbre de dimension finie et de dimension globale finie. Soit B une k -algèbre symétrique graduée indécomposable telle que $B_{<0} = 0$.*

Toute équivalence triangulée graduée $T(A_0)\text{-stabgr} \xrightarrow{\sim} B\text{-stabgr}$ se relève en une équivalence triangulée graduée $D^b(T(A_0)\text{-modgr}) \xrightarrow{\sim} D^b(B\text{-modgr})$.

Démonstration. Le lemme 6.4 montre que $B_i = 0$ pour $i > 1$ et que B admet une forme symétrisante $t_B : N \rightarrow k\langle -1 \rangle$. La proposition 6.14 fournit alors un isomorphisme d'algèbres graduées $B \xrightarrow{\sim} T(B_0)$. Les théorèmes 6.15 et 6.16 fournissent la conclusion. \square

Rappelons qu'une catégorie abélienne \mathcal{C} est héréditaire si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i = 0$ pour $i \geq 2$. Si \mathcal{C} est une catégorie k -linéaire dont les Hom sont de dimension finie, on appelle foncteur de Serre un foncteur $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ muni d'isomorphismes bifonctoriels

$$\text{Hom}(M, N)^* \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(N, S(M))$$

pour $M, N \in \mathcal{C}$.

Le résultat suivant est proche de résultats dûs à Asashiba [As1, As2] (Asashiba suppose que $T(A_0)$ est de type de représentation fini).

Théorème 6.18. *Soit A_0 une k -algèbre de dimension finie indécomposable. Supposons qu'il existe une catégorie abélienne héréditaire \mathcal{C} telle que $D^b(A_0\text{-mod}) \simeq D^b(\mathcal{C})$. Alors, $T(A_0)$ admet des relèvements d'équivalences stables.*

Démonstration. Soit B une k -algèbre symétrique indécomposable munie d'une équivalence stable de type de Morita avec $T(A_0)$. D'après le théorème 4.15, il existe une graduation sur B compatible avec l'équivalence. En composant avec l'équivalence du théorème 6.15 et celle fournie par l'hypothèse, on obtient une équivalence

$$F : B\text{-stabgr} \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{C}).$$

Soient $S_n = S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ des B -modules simples de degré 0 et soient $d_0, \dots, d_{n-1} \in \mathbf{Z}$ tels que $\text{Ext}^1(S_i, S_{i+1}\langle -d_i \rangle) \neq 0$. Puisque $F(S_i)$ est un objet indécomposable de $D^b(\mathcal{C})$ et que \mathcal{C} est héréditaire, il existe un entier n_i tel que $F(S_i) \simeq M_i[n_i]$, où $M_i = H^{-n_i}(F(S_i)) \in \mathcal{C}$.

Le foncteur de Serre de $B\text{-stabgr}$ est $\Omega\langle 1 \rangle$. On a donc

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(S_i, S_{i+1}\langle -d_i \rangle) &\simeq \text{Hom}_{B\text{-stabgr}}(S_i, \Omega^{d_i-1} S^{-d_i}(S_{i+1})) \\ &\simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(M_i, S^{-d_i}(M_{i+1})[n_{i+1} - n_i + 1 - d_i]). \end{aligned}$$

Le lemme 6.19 ci-dessous montre que l'homologie de $S^{-d_i}(M_{i+1})$ s'annule en degrés $> d_i$. Puisque l'espace des Hom ci-dessus est non nul, on en déduit que $n_i - n_{i+1} + 2d_i \geq 0$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{n-1} d_i \geq 0$. La proposition 5.14 montre alors que la graduation sur B peut être choisie en degrés ≥ 0 . Le corollaire 6.17 fournit la conclusion. \square

Lemme 6.19. *Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne héréditaire et S un foncteur de Serre pour $D^b(\mathcal{C})$. Soit $M \in D^b(\mathcal{C})$, $r \in \mathbf{Z}$ et $d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Si $H^i(M) = 0$ pour $i > r$, alors $H^i(S^{-d}(M)) = 0$ pour $i > r + d$.*

Démonstration. Soit n maximum tel que $N = H^n(S^{-1}M) \neq 0$. On a $\text{Hom}(S^{-1}M, N[-n]) \simeq \text{Hom}(N, M[n])^* \neq 0$. Par conséquent, $r - n \geq -1$. On en déduit le lemme par récurrence sur d . \square

6.4. Algèbres extérieures.

6.4.1. Soit k un corps algébriquement clos et V un espace vectoriel de dimension finie sur k . Soit G un groupe fini d'ordre inversible dans k et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation.

Soit $A = \Lambda(V) \rtimes G$ le produit croisé : $A = \Lambda(V) \otimes kG$ comme espace vectoriel, $\Lambda(V) \otimes k$ et $k \otimes kG$ sont des sous-algèbres et $gv g^{-1} = g(v)$ pour $g \in G$ et $v \in V$. L'algèbre A est graduée : kG est en degré 0 et V en degré 1.

Fixons un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Lambda^n V \xrightarrow{\sim} k$, où $n = \dim V$. Soit $\nu \in \text{GL}(V)$ la multiplication par $(-1)^{n+1}$. On note encore ν l'automorphisme d'algèbre induit de $\Lambda(V)$. On étend enfin ν à un automorphisme d'algèbre de A par $\nu(g) = \det(g)g$.

On définit la forme linéaire $t : A \rightarrow k\langle -n \rangle$ par $t(x \otimes g) = \delta_{1g} t(x)$ pour $g \in G$ et $x \in \Lambda^n V$ et par $t(a) = 0$ si $a \in A_{< n}$. On a $t(ab) = t(b\nu(a))$ pour $a, b \in A$.

On a un accouplement parfait

$$A \times A \rightarrow k\langle -n \rangle, \quad (a, b) \mapsto t(ab)$$

et

$$\hat{t} : A_\nu\langle n \rangle \rightarrow A^*, \quad b \mapsto (a \mapsto t(ab))$$

est un isomorphisme de A^{en} -modules gradués. En particulier, A est une algèbre de Frobenius.

Proposition 6.20. *L'algèbre A est symétrique si et seulement si $\rho(G) \leq \text{SL}(V)$ et $(-1)^{\dim V + 1} \in \rho(G)$.*

Démonstration. L'algèbre A est symétrique si et seulement si ν est intérieur.

Supposons $\rho(G) \leq \mathrm{SL}(V)$ et soit $g \in G$ tel que $\rho(g) = (-1)^{n+1} \in G$. Alors, $\nu = \mathrm{ad}(g)$.

Supposons ν intérieur. L'action de ν sur A_0 est intérieure, donc $\rho(G) \leq \mathrm{SL}(V)$. Supposons n pair. Soit $a \in A^\times$ tel que $\mathrm{ad}(a) = \nu$. L'action de $\mathrm{ad}(a)$ sur $V \xrightarrow{\sim} A_{\leq 1}/A_0$ ne dépend que de l'image \bar{a} de a dans $(kG)^\times \xrightarrow{\sim} A^\times/(1 + JA)$. On a $\rho(\bar{a}) = (-1)^{n+1}$. Décomposons $\bar{a} = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ avec $\alpha_g \in k$. Soit $v \in V$. On a $\mathrm{ad}(a)(v) = -v$, donc $av = -va$, i.e., $\sum_g \alpha_g g(v) \otimes g = -\sum_g \alpha_g v \otimes g$ et finalement $g(v) = -v$ si $\alpha_g \neq 0$. Soit $g \in G$ tel que $\alpha_g \neq 0$. Alors, $\rho(g) = -1$. \square

Question 6.21. Supposons $\rho(G) \leq \mathrm{SL}(V)$ et $(-1)^{\dim V+1} \in \rho(G)$. Est-ce que $\Lambda(V) \rtimes G$ satisfait les relèvements d'équivalences stables?

La question précédente est importante pour la théorie des représentations modulaires des groupes finis. Supposons k de caractéristique 2. Soit P un 2-groupe abélien élémentaire et G un groupe d'automorphismes d'ordre impair de P . La construction du §6.2.1 fournit un isomorphisme de k -algèbres $kP \rtimes G \simeq \Lambda(V) \rtimes G$, où $V = P \otimes_{\mathbf{F}_2} k$. Par conséquent, une réponse affirmative à la question 6.21 pour (V, G) implique une réponse affirmative à la question 6.13 pour (P, G) .

6.4.2. *Dimension 2.* Supposons maintenant ρ injective, $\rho(G) \leq \mathrm{SL}(V)$, G n'est pas un groupe cyclique d'ordre impair et la caractéristique de k n'est pas 2. Il existe alors $\sigma \in G$ tel que $\rho(\sigma) = -1$.

Soit I l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G sur k . Soit I_0 le sous-ensemble de I des représentations triviales sur σ . Soit Δ le carquois de sommets I avec $\dim \mathrm{Hom}(\chi, \psi \otimes \rho)$ flèches de ψ vers χ , lorsque $\psi \in I - I_0$ et $\chi \in I$.

Lemme 6.22. *On a un isomorphisme d'algèbres $\Lambda(V) \rtimes G \simeq T(C)$, où C est Morita-équivalente à l'algèbre de carquois de Δ .*

Démonstration. Soit e_χ l'idempotent primitif de $Z(kG)$ associé à $\chi \in I$. On définit $A' = \mathrm{End}_A(\bigoplus_{\chi \in I_0} Ae_\chi \oplus \bigoplus_{\chi \in I - I_0} Ae_\chi \langle 1 \rangle)$. On a $A' = A$ comme algèbres non graduées, mais A' a une graduation différente. On a une équivalence de catégories abéliennes graduées $A'\text{-modgr} \xrightarrow{\sim} A\text{-modgr}$ (§5.3). On a $A' = A'_0 \oplus A'_2$. On considère pour finir la graduation sur $B = A$ obtenue en divisant les degrés par 2 : $B_0 = A'_0$ et $B_1 = A'_2$ et B a une forme symétrisante $B \rightarrow k\langle -1 \rangle$. L'algèbre B_0 est Morita-équivalente à l'algèbre du carquois Δ . D'après la proposition 6.14, on a $B \simeq T(B_0)$. \square

Théorème 6.23. *Si $\dim V = 2$, k n'est pas de caractéristique 2, ρ est injective et $G \leq \mathrm{SL}(V)$ n'est pas un groupe cyclique d'ordre impair, alors $\Lambda(V) \rtimes G$ satisfait les relèvements d'équivalences stables.*

Démonstration. Le théorème résulte du lemme 6.22 ci-dessous et du théorème 6.18. \square

Remarque 6.24. Une algèbre de Brauer associée à une ligne avec multiplicité 1 est isomorphe à une extension triviale de l'algèbre d'un carquois de type A où aucun sommet n'est la source (resp. le but) de deux flèches distinctes [Bog, Proposition 8.1]. Le théorème 6.18 montre alors qu'une telle algèbre de Brauer (et donc toute algèbre de Brauer à multiplicité triviale) satisfait la propriété de relèvement. C'est un résultat classique et l'approche d'Asashiba [As1] de ce résultat est proche de celle que nous avons adoptée.

RÉFÉRENCES

- [As1] H. Asashiba, *A covering technique for derived equivalence*, J. of Alg. **191**, 1997, 382–415.
- [As2] H. Asashiba, *On a lift of an individual stable equivalence to a standard derived equivalence for representation-finite self-injective algebras*, Algebr. Represent. Theory **6** (2003), 427–447.
- [Bog] D. Bogdanic, *Graded Brauer tree algebras*, preprint arXiv :0810.2409.
- [Bki] N. Bourbaki, “Algèbre commutative”, Chapitres I à IV, Masson, Paris, 1985.
- [Bro] M. Broué, *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181-182** (1990), 61–92.
- [BruKl] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, preprint arXiv :0808.2032.
- [ChRou] J. Chuang et R. Rouquier, *Derived equivalences for symmetric groups and \mathfrak{sl}_2 -categorification*, Annals of Math. **167** (2008), 245–298.
- [Da] E. Dade, *Algebraically rigid modules*, in “Representation theory II”, Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979, pp. 195–215, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin, 1980.
- [DoFl] J.D. Donald et F.J. Flanigan, *Deformations of algebra modules*, J. of Alg. **31** (1974), 245–256.
- [GuSa] F. Guil-Asensio et M. Saorin, *On automorphism groups induced by bimodules*, Arch. Math. (Basel) **76** (2001), 12–19.
- [Ha] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 339–389.
- [HuiSa] B. Huisgen-Zimmermann et M. Saorín, *Geometry of chain complexes and outer automorphisms under derived equivalence*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 4757–4777.
- [Huy] D. Huybrechts, “Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry”, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2006.
- [Kü] B. Külshammer, *Crossed products and blocks with normal defect groups*, Comm. Algebra **13** (1985), 147–168.
- [Or1] D. Orlov, *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), 1361–1381.
- [Or2] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Math. **66** (2002), 569–594.
- [Po] R. D. Pollack, *Algebras and their automorphism groups*, Comm. in Alg. **17** (1989), 1843–1866.
- [Ri] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 37–48.
- [Rou1] R. Rouquier, *Block theory via stable and Rickard equivalences*, in “Modular representation theory of finite groups”, de Gruyter, 101–146, 2001.
- [Rou2] R. Rouquier, *Catégories dérivées et géométrie birationnelle*, Séminaire Bourbaki 946, Mars 2005, Astérisque **307** (2006), 283–307.
- [Rou3] R. Rouquier, *Derived equivalences and finite dimensional algebras*, International Congress of Mathematicians, Vol. II, 191–221, Eur. Math. Soc., 2006.
- [Rou4] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, preprint arXiv :0812.5023.
- [Rou5] R. Rouquier, *Local constructions in block theory*, en preparation.
- [RouZi] R. Rouquier et A. Zimmermann, *Picard groups for derived module categories*, J. London Math. Soc. **87** (2003), 197–225.
- [Se] J. P. Serre, “Groupes algébriques et corps de classes”, Hermann, 1959.
- [Soe] W. Soergel, *Kategorie \mathcal{O} , perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 421–445.
- [Th] J. Thévenaz, “G-Algebras and modular representation theory”, Oxford Univ. Press, 1995.
- [Ye1] A. Yekutieli, *Dualizing complexes, Morita equivalence and the derived Picard group of a ring*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 723–746.
- [Ye2] A. Yekutieli, *The derived Picard group is a locally algebraic group*, Algebr. Represent. Theory **7** (2004), 53–57.